



Electromagnetismo I



Heliodoro Cataño V.
José Germán López Q.
Alexander Molina C.

Heliodoro Cataño Villareal,
(Pereira, Risaralda, Colombia, 1948)

Ingeniero Electricista, Universidad Tecnológica de Pereira.

Profesor Jubilado actualmente catedrático, Facultad de Ingenierías.

Libro ELECTROMAGNETISMO I, 1998.

helioalcio@gmail.com

José German López Quintero,
(Santa Rosa de Cabal, Risaralda, Colombia, 1949)

Ingeniero Electricista, Universidad Tecnológica de Pereira.

Profesor Titular, Facultad de Ingenierías.

Libro Transformadores Eléctricos, 2018.

He publicado artículos en revistas nacionales.

jglq2012@utp.edu.co

Alexander Molina Cabrera,
(Florencia, Caquetá, Colombia, 1981)

Ingeniero Electricista, Universidad Tecnológica de Pereira.

Magister en Ingeniería Eléctrica, Universidad Tecnológica de Pereira.

Doctor en Ingenierías, Universidad de los Andes.

Profesor Asociado, Facultad de Ingenierías.

“Mi interés profundo por las ciencias de la naturaleza y de la humanidad me animan a conocer con mayor profundidad estos enigmas; y en esto también me motiva invitar a estudiantes y otros colegas a que compartamos este interés.”

almo@utp.edu.co

Electromagnetismo I

Heliodoro Cataño V.
José Germán López Q.
Alexander Molina C.



Facultad de Ingenierías
Colección Textos Académicos
2023

Cataño Villareal, Heliodoro
Electromagnetismo I / Heliodoro Cataño Villareal, José Germán
López Quintero y Alexander Molina Cabrera. -- Pereira : Universidad
Tecnológica de Pereira, 2023.
466 páginas. -- (Colección Textos académicos).

e-ISBN: 978-958-722-859-5

1. Electromagnetismo – ingeniería eléctrica 2. Electrocinética 3.
Campo electrostático 4. Física matemática 5. Electrostática 6.
Análisis vectorial

CDD. 537

Electromagnetismo I

© Heliodoro Cataño V.
© José Germán López Q.
© Alexander Molina C.
© Universidad Tecnológica de Pereira

eISBN: 978-958-722-859-5

Imagen de cubierta: Andrés Felipe Cataño

Universidad Tecnológica de Pereira
Vicerrectoría de Investigaciones, Innovación y Extensión
Editorial Universidad Tecnológica de Pereira
Pereira, Colombia

Coordinador editorial:

Luis Miguel Vargas Valencia
luismvargas@utp.edu.co
Teléfono 313 7381
Edificio 9, Biblioteca Central “Jorge Roa Martínez”
Cra. 27 No. 10-02 Los Álamos, Pereira, Colombia
www.utp.edu.co

Montaje y producción:
María Alejandra Henao Jiménez
Universidad Tecnológica de Pereira
Pereira

Reservados todos los derechos

DEDICATORIA

*A mi Señor,
a mi Madre Celestial,
a los Ángeles y
a mi familia.
H.Cataño V.*

*A mi esposa Ana Lucía a la que le debo gran parte
de mis logros pues su apoyo y continuo acompañamiento
y comprensión me han permitido cosechar los éxitos
con que la vida me ha premiado. Ella, al igual que
mis hijos Andrea y Mauricio y mis nietos Emilia y Emanuel,
han sido un invaluable soporte en todas las actividades
que he acometido en buena parte de mi vida.
J.G.López Q.*

*A Sonia y Laila, por iluminar mi camino de vida
con su belleza y sonrisas: las amo mucho. A mi madre Prescelia
y mi padre Roque, quienes ayudaron a formar mi carácter y
capacidad para transitar caminos no conocidos. A mis hermanos
Wilfredo, Yazmin, Yaneth y mi tía Mariela que dieron soporte
a mi formación como ingeniero. A mi profe José Germán López Q:
mi enorme admiración se basa en su inmensurable
aporte al sector eléctrico colombiano basado en el
ejercicio docente y administrativo con servicio a la humanidad.
A. Molina C.*

CONTENIDO

Prólogo	11
Introducción	13

CAPÍTULO UNO

ELECTROMAGNETISMO E INGENIERÍA ELÉCTRICA	17
1.1. Ingeniería y Matemáticas.	17
1.1.1. Ley de Coulomb.	17
1.2. Propiedades del medio.....	19
1.2.1. Homogéneo.....	19
1.2.2. Lineal.....	19
1.2.3. Isótropo.....	19
1.3. Electricidad y mecánica.....	20
1.4. Electricidad y carga eléctrica.....	20
1.4.1. Naturaleza de las cargas	20
1.4.2. Conservación.....	21
1.4.3. Cuantificación.....	21
1.4.4. Invarianza.....	21
1.4.5. Electrón.....	22
1.4.6. Protón.....	22
1.4.7. Neutrón.....	22
1.5. Ecuaciones de Maxwell.....	23
1.6. Energía y sus formas.....	24
1.6.1. Energía mecánica.....	24
1.6.2. Energía elástica.....	25
1.6.3. Energía química.....	25
1.6.4. Energía térmica.....	25
1.6.5. Energía solar.....	25
1.6.6. Energía nuclear.....	25
1.6.7. Energía eléctrica.....	25
1.7. Conservación y degradación de la energía.....	26
1.8. Conclusión.....	28

CAPÍTULO DOS

TEORÍA GENERAL DE LOS CAMPOS Y ANÁLISIS VECTORIAL	31
2.1. Generalidades.....	31
2.1.1. Escalar.....	31
2.1.2. Vector.....	31
2.1.3. Campo.....	32
2.1.4. Campo escalar.....	32
2.1.5. Campo vectorial.....	32
2.2. Sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales.....	33
2.2.1. Superficie cerrada.....	35
2.2.2. Superficie abierta.....	35
2.2.3. Conversión de vectores de un sistema ortogonal a otro.....	37
2.3. Análisis vectorial.....	41
2.3.1. Vector libre.....	41
2.3.2. Vector fijo.....	41

2.3.3. Vector unitario.	41
2.3.4. Producto de un escalar por un vector.	42
2.3.5. Suma.	42
2.3.6. Producto escalar, punto o interno.	42
2.3.7. Producto vectorial, cruz o externo.	44
2.3.8. Producto triple escalar.	45
2.3.9. Producto triple vectorial.	46
2.3.10. Diferenciación de vectores.	46
2.4. Gradiente.	46
2.4.1. Cálculo del gradiente en coordenadas curvilíneas ortogonales.	47
2.5. Flujo.	49
2.6. Divergencia.	50
2.6.1. Cálculo de la divergencia en coordenadas curvilíneas ortogonales.	51
2.6.2. Teorema de la divergencia o de Gauss.	53
2.6.3. Laplaciano escalar.	54
2.7. Líneas de campo.	54
2.8. Líneas de nivel o equipotenciales.	55
2.9. Ángulo sólido.	57
2.10. Integral de línea.	60
2.11. Rotacional.	61
2.11.1. Cálculo del rotacional en coordenadas curvilíneas ortogonales.	62
2.11.2. Teorema del rotacional o de Stokes.	64
2.12. Combinación de operadores.	65
2.13. Teorema de Helmholtz.	66
2.14. Clasificación general de los campos vectoriales.	66
2.15. Teoremas de Green.	67
2.15.1. Primer teorema de Green.	67
2.15.2. Segundo teorema de Green.	67
2.16. Solución de la ecuación de Laplace en una dimensión.	68
2.16.1. Coordenadas cartesianas.	68
2.16.2. Coordenadas cilíndricas.	68
2.16.3. Coordenadas esféricas.	69
2.17. Solución de la ecuación de Laplace en dos dimensiones.	70
2.17.1. Coordenadas cartesianas.	70
2.17.2. Coordenadas Cilíndricas.	72
2.17.3. Coordenadas esféricas.	74
2.18. Ejemplos.	78
2.19. Problemas.	115

CAPÍTULO TRES

CAMPO ELECTROSTÁTICO EN EL ESPACIO LIBRE.	125
3.1. Ley de la electrostática.	125
3.1.1. Ley de Coulomb y campo electrostático.	126
3.2. Potencial electrostático.	129
3.3. Teorema de Helmholtz.	130
3.3.1. Rotacional del campo electrostático o teorema de Stokes.	130
3.3.2. Divergencia del campo electrostático o teorema de Gauss.	132
3.3.3. Ecuaciones de Poisson y Laplace.	133
3.4. Clasificación de los materiales.	133

3.4.1. Conductores.....	133
3.4.2. Aislantes.....	134
3.4.3. Semiconductores.....	134
3.5. Conductores.....	134
3.6. Condiciones de frontera.....	135
3.6.1. Componente normal.....	135
3.6.2. Componente tangencial.....	136
3.7. Campo en la cavidad de un conductor.....	138
3.7.1. Cavidad sin carga.....	138
3.7.2. Cavidad con carga.....	139
3.8. Conductor descargado en presencia de un campo eléctrico externo.....	140
3.8.1. Apantallamiento.....	140
3.9. Casos especiales de conductores.....	145
3.9.1. Esfera conductora.....	145
3.9.2. Cilindro conductor.....	145
3.10. Sistemas de conductores.....	146
3.11. Expansión multipolar del potencial electrostático.....	154
3.11.1. Término monopolar.....	156
3.11.2. Término dipolar.....	157
3.11.3. Trabajo y torque sobre un dipolo.....	158
3.11.4. Translación del origen de coordenadas.....	159
3.11.5. Término cuadripolar.....	160
3.12. Método de las imágenes o de Lord Kelvin.....	163
3.12.1. Carga puntual próxima a un plano conductor muy grande a potencial cero.....	163
3.12.2. Carga puntual ubicada entre dos planos conductores muy grandes que se cortan formando un ángulo y están a potencial cero.....	165
3.12.3. Carga puntual próxima a una esfera conductora a potencial cero.....	166
3.12.4. Esfera aislada de tierra y descargada.....	169
3.12.5. Esfera aislada de tierra y con carga Q_S	170
3.12.6. Línea de carga frente a un plano conductor muy extenso a potencial cero.....	170
3.12.7. Cilindro conductor de radio R a potencial $V=V_0$ frente a un plano conductor muy extenso a potencial cero.....	177
3.13. Ejemplos.....	179
3.14. Problemas.....	254

CAPÍTULO CUATRO

CAMPO ELECTROSTÁTICO EN MEDIOS MATERIALES.....	263
4.1. Aislantes y dieléctricos.....	263
4.1.1. Aislante.....	263
4.1.2. Dieléctrico.....	263
4.1.3. Circuito equivalente de un aislante.....	264
4.2. Polarización eléctrica, $\mathbb{P}$	265
4.2.1. Dieléctricos polares.....	265
4.3. Tipos de polarización.....	266
4.3.1. Electrónica.....	266
4.3.2. Atómica.....	266
4.3.3. Dipolar.....	266
4.3.4. Interfacial.....	267
4.4. Campo eléctrico externo e interno a un dieléctrico.....	267

4.5. Rigidez eléctrica.....	270
4.6. Efecto corona.....	270
4.7. Cálculo de la intensidad de campo local, efectivo o molecular	271
4.8. Divergencia del campo eléctrico y vector desplazamiento eléctrico.....	275
4.8.1. Ecuación de Clausius - Mossotti.....	277
4.9. Condiciones de frontera.....	278
4.9.1. I. Potencial.....	278
4.9.2. II. Componente tangencial del campo electrostático y del desplazamiento eléctrico.....	279
4.9.3. III. Componente normal del campo electrostático y del desplazamiento eléctrico.....	280
4.9.4. Caso particular: dieléctrico.....	282
4.9.5. Ley de Snell.....	282
4.10. Dieléctricos polares.....	283
4.10.1. Ecuación de Langevin.....	283
4.10.2. Ecuación de Debye.....	286
4.11. Energía.....	287
4.11.1. Densidad de energía del campo.....	291
4.11.2. Conversión mutua de la energía del campo eléctrico y de la energía mecánica.....	291
4.11.3. I. El sistema de cuerpos cargados está desconectado de las fuentes.....	292
4.11.4. II. El sistema de cuerpos cargados está conectado a fuentes de potenciales constantes.....	293
4.12. Ejemplos.....	295
4.13. PROBLEMAS.....	325

CAPÍTULO CINCO

CAPACIDAD ELECTROSTÁTICA Y SUS APLICACIONES	331
5.1. Clases de capacitores.....	332
5.1.1. I. Capacitor plano o de placas paralelas.....	332
5.1.2. II. Capacitor cilíndrico.....	333
5.1.3. III. Capacitor esférico.....	334
5.2. Asociación de capacitores.....	335
5.2.1. I. Capacitores conectados en serie.....	335
5.2.2. II. Capacitores conectados en paralelo.....	336
5.2.3. III. Conexión mixta.....	337
5.3. Capacitancia de las líneas de transmisión.....	337
5.3.1. Campo eléctrico y potencial eléctrico de un conductor cilíndrico de gran longitud.....	337
5.3.2. Potencial de un conductor cilíndrico en un grupo.....	338
5.4. Capacitancia de una línea monofásica.....	340
5.5. Capacitancia de una línea trifásica con disposición equilátera.....	342
5.6. Capacitancia de una línea trifásica con disposición asimétrica y transpuesta.....	344
5.7. Efecto de la tierra sobre la capacitancia de las líneas de transmisión aéreas.....	348
5.7.1. Efecto de la tierra sobre la capacitancia de la línea monofásica.....	350
5.7.2. Efecto de la tierra sobre la capacitancia de una línea trifásica con disposición asimétrica y transpuesta.....	352
5.8. Conductores agrupados o en haz.....	354
5.9. Líneas trifásicas de circuitos paralelos.....	358
5.10. Ejemplos.....	362
5.11. Problemas.....	373

CAPÍTULO SEIS

ELECTRODINÁMICA	379
6.1. Clases de corriente.....	380
6.2. I. Función del tiempo.....	380
6.2.1. a. Corriente directa.....	380
6.2.2. b. Corriente alterna.....	381
6.3. II. Corriente de régimen transitorio.....	381
6.4. III. Función del medio.....	382
6.5. Densidad de corriente.....	382
6.6. Ecuación de continuidad o conservación de la carga.....	383
6.7. Ley de Ohm.....	385
6.8. Tiempo de relajación.....	387
6.9. Campo no conservativo.....	389
6.10. Ley de Joule.....	391
6.11. Cálculo de la resistencia de conductores de forma arbitraria.....	393
6.12. Condiciones de frontera y refracción de las líneas de corriente.....	394
6.13. Corriente de convección.....	396
6.14. Ejemplos.....	398
6.15. Problemas.....	447

Apéndice A

COORDENADAS CURVILÍNEAS ORTOGONALES I.....	451
A.1. Coordenadas cilíndricas.....	451
A.1.1. Vectores unitarios.....	452
A.2. Coordenadas esféricas.....	454
A.2.1. Vectores unitarios.....	455
A.3. Coeficientes métricos.....	456
A.3.1. Coordenadas cartesianas.....	456
A.3.2. Coordenadas cilíndricas.....	457
A.3.3. Coordenadas esféricas.....	457

Apéndice B

COORDENADAS CURVILÍNEAS ORTOGONALES II.....	459
B.1. Coordenadas y coeficientes métricos.....	459
B.2. Conversión de coordenadas cilíndricas a cartesianas y viceversa.....	460
B.3. Conversión de coordenadas esféricas a cartesianas y viceversa.....	460
B.4. Conversión de vectores cartesianos unitarios a cilíndricos unitarios.....	460
B.5. Conversión de vectores cilíndricos unitarios a cartesianos unitarios.....	461
B.6. Conversión de vectores cartesianos unitarios a esféricos unitarios.....	461
B.7. Conversión de vectores esféricos unitarios a cartesianos unitarios.....	461
B.8. Gradiente.....	462
B.8.1. Coordenadas Cartesianas.....	462
B.8.2. Coordenadas Cilíndricas.....	462
B.8.3. Coordenadas Esféricas.....	462
B.9. Divergente.....	462
B.9.1. Coordenadas cartesianas.....	462
B.9.2. Coordenadas cilíndricas.....	463
B.9.3. Coordenadas esféricas.....	463
B.10. Rotacional.....	463

B.10.1. Coordenadas cartesianas	463
B.10.2. Coordenadas cilíndricas	464
B.10.3. Coordenadas esféricas.....	464
B.11. Laplaciano escalar.....	464
B.11.1. Coordenadas cartesianas	464
B.11.2. Coordenadas cilíndricas	464
B.11.3. Coordenadas esféricas.....	465
Bibliografía	467

Prólogo

Estimado lector, como colega de ingeniería eléctrica, quisiera pedirte que aproveches el conocimiento, experiencia y experticia que se han plasmado en este libro, por parte de los profesores Heliodoro Cataño Villarreal, Alexander Molina Cabrera y José Germán López Quintero (mi gran maestro). Los autores han buscado la manera de presentar cada temática de una forma detallada, amena, clara y muy útil para el Electromagnetismo, lo cual te permitirá tener una base sólida para los demás cursos de la carrera.

En particular, el estudio de la Carga eléctrica, que es un concepto fundamental del Electromagnetismo, ha permitido alcanzar el actual desarrollo tecnológico de las máquinas eléctricas de alta eficiencia, las líneas de transmisión (y la conducción inalámbrica), las telecomunicaciones y hasta los teléfonos celulares de última generación. De esto se infiere que el Electromagnetismo, como rama de la Física, requiere de un análisis riguroso, profundo y concienzudo, como el que se encuentra en este libro.

Quiero felicitar a los profesores por asumir el reto de presentar un texto que facilita el aprendizaje y la comprensión de la física y matemática que rigen las ingenierías, eléctrica, electrónica, telecomunicaciones, sistemas, entre otras. Además, les agradezco la dedicación y el esfuerzo realizado, reflejado en el contenido y desarrollo del libro, porque se conceptualizan los conocimientos de una forma lógica y constructiva, que le permitirá a los lectores profundizar en esta temática.

Finalmente, quiero agradecer a los autores por honrarme con la invitación a escribir el presente prólogo, pues el Electromagnetismo ha sido de enorme utilidad para sustentar los cursos que he tenido a cargo y los proyectos de investigación en los que he participado, en temas que van desde los circuitos eléctricos hasta los cortocircuitos en sistemas de potencia; sin embargo, me considero un aprendiz y un aficionado, y probablemente lo seguiré siendo.

Noé Alejandro Mesa Quintero
Ingeniero Electricista, MSc, MBA
Jefe del Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Antioquia

Introducción

La Universidad Tecnológica de Pereira inició actividades académicas el primero de marzo de 1961, y en ese entonces la única unidad académica era la Facultad de Ingeniería Eléctrica, a la que se incorporaron los primeros estudiantes de la UTP. El plan de estudios de Ingeniería Eléctrica incluía a partir de ese momento el abordaje del fenómeno electrostático en un primer curso y el fenómeno electrodinámico en un segundo curso: el nombre de estos cursos son Electromagnetismo I y Electromagnetismo II respectivamente. Desde entonces se han impartido a los estudiantes de ingeniería eléctrica consolidando unas bases teóricas sólidas y muy rigurosas. Este texto es el resultado de varios años de experiencia de los autores orientando el curso de ELECTROMAGNETISMO I del programa de Ingeniería Eléctrica, y contiene las notas de clase utilizadas para el desarrollo del mismo, así como muchos ejemplos y ejercicios resueltos para orientar sobre la aproximación al fenómeno electrostático.

Como se ha dicho, el libro de texto que se encontrarán es básicamente el desarrollo del microcurrículo del curso que se ha impartido a lo largo de la historia del programa incluyendo sus diferentes actualizaciones. El documento se ha desarrollado de tal manera que sea comprensible para estudiantes de pregrado y sirva de base para estudiar temáticas más avanzadas en esta área. Además, contiene un suficiente número de aplicaciones que ilustran los conceptos básicos.

Los capítulos de este libro constituyen los principios básicos de la electrostática y algunos elementos importantes de la electrocinética.

El capítulo 1 trata sobre el ELECTROMAGNETISMO Y LA INGENIERÍA ELÉCTRICA, se hace un resumen de las ecuaciones de Maxwell y se estudia la energía y sus formas, enfatizando en la energía eléctrica como la más difundida y utilizada. En el capítulo 2 se estudia la TEORÍA GENERAL DE LOS CAMPOS Y ANÁLISIS VECTORIAL; este tema es fundamental para el estudio de la teoría electromagnética y se hace énfasis en la relación entre los campos y sus fuentes. El análisis vectorial es ampliamente utilizado en todo el texto y hemos planteado una perspectiva rigurosa y autocontenida.

El capítulo 3 discute el CAMPO ELECTROSTÁTICO EN EL ESPACIO LIBRE, de esta manera el campo eléctrico y su relación con la carga eléctrica se desarrollan como una formulación básica. En el capítulo 4 se estudia el CAMPO ELECTROSTÁTICO EN MEDIOS MATERIALES, donde las propiedades de los dieléctricos son consideradas en el cálculo de los campos.

El capítulo 5 trata de la CAPACIDAD ELECTROSTÁTICA Y SUS APLICACIONES, aquí se hace énfasis sobre la capacitancia de las líneas de transmisión. Y el capítulo 6 estudia ELECTROKINÉTICA, donde se analiza la corriente y la ley

de Ohm. Se presenta una solución al cálculo de la resistencia de un conductor.

Finalmente, los autores queremos agradecer a todos los Profesores que han trabajado esta área en Ingeniería Eléctrica de la Universidad Tecnológica de Pereira, muy especialmente a los profesores Héctor Julio Sánchez Acero (QEPD) y Julio César Vásquez Ceballos.

La tarea de escribir un texto académico nunca se termina, por consiguiente, pretende ser una herramienta inicial para el aprendizaje; por lo anterior, invitamos a los que quieran ayudarnos a mejorarlo a realizar sugerencias y recomendaciones, estaremos atentos a sus observaciones.

Los Autores.

1

CAPÍTULO UNO

ELECTROMAGNETISMO E INGENIERÍA ELÉCTRICA.

El electromagnetismo es el soporte lógico de la Ingeniería Eléctrica y protagonista esencial en esta ciencia aplicada. El tratamiento matemático se condiciona al contenido físico.

La Ingeniería Eléctrica se ocupa de los fenómenos en que intervienen cargas eléctricas, en especial el movimiento, las fuerzas entre ellas y la energía que llevan asociada. En ciertas aplicaciones, como grandes máquinas, interesa fundamentalmente la generación, transformación, transmisión y utilización de la energía asociada a las cargas, mientras que en otras, como computadoras, servosistemas, etc., se utilizan las fuerzas y energía de aquéllas como medio para transmitir información.

Las leyes fundamentales del electromagnetismo son pocas, se expresan en lenguaje matemático y de ellas se obtienen un sinnúmero de aplicaciones útiles.

1.1. Ingeniería y Matemáticas.

1.1.1. Ley de Coulomb.

En 1785 Charles Agustín de Coulomb investigó la naturaleza de la fuerza eléctrica entre cuerpos cargados. Las siguientes conclusiones son consecuencia de sus experimentos.

- La fuerza entre cuerpos puntuales cargados es:

- Directamente proporcional al producto de las magnitudes de las cargas
- Inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre las cargas
- De atracción si las cargas son de naturaleza diferente y de repulsión si son de la misma naturaleza
- Función del medio en que se encuentran las cargas
- La dirección de la fuerza es colineal con el segmento de recta que une a ambas cargas.

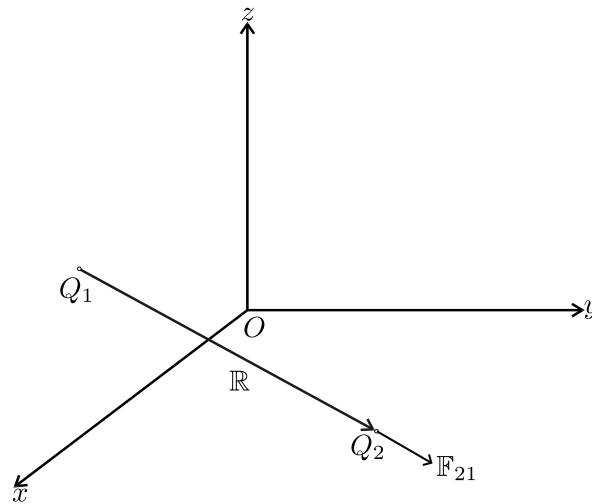


Figura 1.1 Ley de Coulomb.

Esta ley descrita con demasiadas palabras, se escribe en forma matemática y concisa mediante la siguiente ecuación, ver Fig.1.1 :

$$\mathbb{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o\epsilon_r} \frac{Q_1 Q_2}{R^3} \mathbb{R} \quad (1.1)$$

- $\mathbb{F}_{21}$: Fuerza que actúa sobre la carga Q_2 debido a Q_1 . Se mide en [Nw]
- R: distancia entre las cargas Q_1 y Q_2 . Se mide en [m]
- $\mathbb{R}$: vector cuyo origen está en la fuente y cabeza en el efecto. Se mide en [m]
- Q_1 y Q_2 : causa y efecto respectivamente, contiene información sobre la magnitud y naturaleza de las cargas involucradas en el problema. Se mide en [C]

- ε_r : constante dieléctrica del medio o permitividad relativa, adimensional.
- $\varepsilon_r = 1$, para el aire.
- ε_o : permitividad del espacio libre, aire o vacío. Se mide en $\left[\frac{F}{m}\right]^1$.

1.2. Propiedades del medio.

El medio en que se encuentran las cargas debe cumplir las siguientes condiciones:

1.2.1. Homogéneo.

Es un medio para el cual la permitividad, la permeabilidad y la conductividad tienen el mismo valor en cada punto.

1.2.2. Lineal.

Es un medio para el cual la permitividad, la permeabilidad y la conductividad conservan el mismo valor en cada punto si se modifican las magnitudes de los campos aplicados y se conserva la dirección de éstos.

1.2.3. Isótropo.

Es un medio para el cual la permitividad, la permeabilidad y la conductividad conservan el mismo valor en cada punto si se modifican las direcciones de los campos aplicados.

Una ley expresada en términos matemáticos muestra con mayor claridad su importancia, como ocurrió cuando Maxwell expresó en una ecuación la ley de la inducción electromagnética de Faraday, la cual estaba enunciada con palabras. Las actitudes entre un ingeniero y un matemático difieren: éste sigue reglas estrictas y aquél hace comprobaciones mediante experimentos que llevan a fenómenos medibles y de los cuales pueden surgir otros y/o propiedades no detectables a simple vista, así, el

¹ $\varepsilon_o = 8,85 \times 10^{-12} \left[\frac{F}{m}\right] = \frac{10^{-9}}{36\pi} \left[\frac{F}{m}\right]$

valor de una teoría depende de su aplicación. Al obtener lecturas de un instrumento en un experimento, cabe preguntar: ¿cómo se organizan en una ley electromagnética? y al observar una ley formulada matemáticamente ¿qué experimentos permiten verificarla? ¿qué beneficios se obtienen de ella?, si las condiciones bajo las cuales se obtuvo se modifican ¿continúa verificándose?

Cuando un ingeniero electricista se refiere a un punto, no es al matemático, sino a una región pequeña comparada con las dimensiones de un aparato o con otras longitudes significativas: longitud de onda, profundidad del efecto piel, etc. se considera que un punto está confinado a un volumen esférico de diámetro 10^{-10} [m], que es aproximadamente el de un átomo. Sin el auxilio de las matemáticas el desarrollo del electromagnetismo habría sido casi imposible.

1.3. Electricidad y mecánica.

Un ingeniero electricista colaborará con otra clase de ingenieros y para esto, sabrá cómo usar las ideas de otras ramas de la materia y unificará un lenguaje común para un grupo de ciencias. Lo anterior se logra en las ciencias físicas si se toman temas de la mecánica, tales como cantidad de movimiento, fuerza y energía que se aplican tanto a problemas eléctricos, como a la termodinámica y a la mecánica de fluidos. La mecánica trata con la acción de fuerzas por medio de uniones físicas: mecanismos, asimismo, con las de acción a distancia: sistema solar.

La terminología de la mecánica se aplica a la mecánica cuántica y a la ondulatoria, donde los conceptos se mantienen, aunque las reglas han variado. Cavendish, Franklin, Ampère, Maxwell y otros trataron de establecer el tema de la electricidad como uno de la mecánica. Así escribieron sobre electrostática y electrodinámica, donde señalaron las semejanzas y diferencias entre la mecánica general y la electricidad.

1.4. Electricidad y carga eléctrica.

1.4.1. Naturaleza de las cargas

El sistema mecánico se establece sobre los conceptos de longitud, masa y tiempo. Para expresar las propiedades eléctricas de un sistema se necesita un concepto adicional: la carga eléctrica. En el laboratorio se observan dos naturalezas de carga diferentes, la positiva y la negativa.

Otras propiedades de las cargas son:

1.4.2. Conservación.

La carga de un sistema aislado ² es constante, la carga no se crea ni se destruye.

1.4.3. Cuantificación.

La carga de un cuerpo es múltiplo de la fundamental.

1.4.4. Invarianza.

Independiente del sistema en que se encuentre un cuerpo cargado, observadores ubicados en diferentes sistemas de referencia miden la misma cantidad de carga para éste.

Existen partículas fundamentales cargadas que originan otras y se aniquilan en procesos de transformación, pero la carga total antes y después del proceso es la misma. La ley de la fuerza entre cargas electrostáticas presenta similitud con la de atracción gravitatoria, simplemente se cambia la masa por la carga y la constante ³. Sin embargo, existen diferencias:

- La fuerza entre las cargas es atractiva o repulsiva: las cargas de la misma naturaleza se repelen y las de naturaleza diferente se atraen; en cambio, la fuerza gravitatoria es sólo atractiva.
- La fuerza electrostática entre dos electrones es mayor que la gravitatoria. La relación entre éstas es del orden de 10^{42} .

La mayoría de las partículas cargadas poseen tiempo de vida finito. Entre las que tienen vida infinita están el electrón, el protón y sus antipartículas.

² Volumen limitado por una superficie cerrada, que no es atravesada por la materia

³ $G=6,67 \times 10^{-11}[m^3 (KgS)^{-1}]$

1.4.5. Electrón.

Es el portador elemental de la carga negativa, se considera carga puntual. Esto es contradictorio, ya que la energía del campo eléctrico debida a una carga puntual es infinita y también de igual modo la masa inerte, lo cual contradice el experimento: $m_e = 9,1 \times 10^{-31} [Kg]$. Hoy, experimentalmente no se conoce la estructura electromagnética del electrón.

1.4.6. Protón.

Es el portador elemental de la carga positiva. No es una partícula puntual. La distribución de la carga eléctrica dentro del protón se estudia experimentalmente. La carga del protón se concentra en una esfera de radio $10^{-15} [m]$. En la naturaleza no se encuentran objetos físicos cuya carga sea igual a cierta fracción de la elemental. A pesar de todos los esfuerzos experimentales no se han detectado quarks en estado libre, pero en el interior del protón existen. En la actualidad se supone que éste consta de dos quarks arriba y uno abajo. Los quarks en el protón están en movimiento, esto permite explicar muchos fenómenos y de ahí que la hipótesis sea probable.

$$P = 2Q \uparrow + Q \downarrow = 2 \left(\frac{2e}{3} \right) + \left(\frac{-e}{3} \right) = e$$

donde:

P : protón.

$Q \uparrow$: quark arriba.

$Q \downarrow$: quark abajo.

e : valor absoluto de la carga del electrón.

1.4.7. Neutrón.

No es una partícula puntual. Es neutra, sin carga neta. Cerca de su centro se sitúa la carga positiva y lejos de él la carga negativa. En la actualidad se cree que el neutrón consta de un quark arriba y dos quarks abajo.

$$N = Q \uparrow + 2Q \downarrow = \left(\frac{2e}{3} \right) + 2 \left(\frac{-e}{3} \right) = 0$$

Las partículas además de carga, poseen un spín. Éste no se determina por la rota-

ción de la partícula. Esta propiedad es importante en el análisis del ferromagnetismo. La existencia del dipolo magnético no se explica por el simple movimiento de la carga, es otra propiedad de la partícula.

La teoría electromagnética se relaciona con efectos macroscópicos, la teoría clásica considera la corriente como un flujo continuo de partículas pequeñísimas, pero no explica los procesos de conducción en la materia, ya que esta depende de la estructura atómica y de la mecánica cuántica para su interpretación.

En mecánica general, se supone que los cuerpos tienen carga eléctrica despreciable. En algunas interacciones eléctricas se desprecian los efectos de masa: descargas en el vacío o en un gas y en otras se consideran los efectos de masa y carga: las máquinas eléctricas donde hay interacción de las masas mecánicas con la inercia eléctrica de las cargas móviles. Cuando un ingeniero electricista habla de un cuerpo cargado se refiere a un exceso o defecto de carga negativa. Se considera que el universo es neutro, o sea no tiene carga neta.

Se estableció que existía conexión entre la electricidad y el magnetismo: se observó que las tormentas eléctricas influían en los imanes usados en las brújulas magnéticas. A pesar de esto, no se sabía cómo interactuaban. Se estableció que existían dos clases de fluidos: carga eléctrica e intensidad de polo magnético.

En 1750 se observó que la ley de la fuerza entre imanes presenta similitud con la gravitatoria, sencillamente se cambia la masa por la intensidad de polo magnético y de constante. Esto sucedían antes de establecerse la ley de Coulomb. Sin embargo, si se consideran polos magnéticos existe una dificultad: no pueden existir aislados, el positivo tiene uno negativo asociado a él.

1.5. Ecuaciones de Maxwell.

En 1820 Oersted, notó efectos magnéticos cerca de un alambre que lleva una corriente; posteriormente, Ampère formula la ley de la fuerza entre circuitos que llevan corrientes; posteriormente, Faraday establece la ley de inducción electromagnética y Maxwell presenta sus cuatro ecuaciones famosas, que condensan el estudio del electromagnetismo:

$$\nabla \cdot \mathbb{D} = \rho \quad (1.2)$$

La Ec. (1.2) indica que las cargas eléctricas existen aisladas y crean un campo eléctrico; las líneas de éste son abiertas y se originan en una carga positiva y

terminan en una negativa.

$$\nabla \times \mathbb{E} = -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

La Ec. (1.3) establece que un campo magnético variable en el tiempo engendra uno eléctrico.

$$\nabla \cdot \mathbb{B} = 0 \quad (1.4)$$

La Ec. (1.4) expresa que las cargas magnéticas no pueden existir aisladas; las líneas de campo magnético son cerradas y continuas.

$$\nabla \times \mathbb{H} = \mathbb{J} + \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial t} \quad (1.5)$$

La Ec. (1.5) establece que una corriente directa o variable y/o un campo eléctrico variable en el tiempo engendran uno magnético. Estas ecuaciones son lineales y tienen en cuenta el principio de superposición, que es un hecho experimental independiente. Así los fenómenos de electricidad y magnetismo no son independientes.

Se halló que la energía electrostática es potencial y la magnética es cinética. Éstas son diferentes, no obstante, se transforman una en otra; la teoría completa de Maxwell presenta una gran simetría entre los dos tipos de energía o entre electricidad y magnetismo.

1.6. Energía y sus formas.

El principio de conservación de la energía, establece que ésta no se pierde, sino que pasa de un sistema a otro; cuando esto ocurre se realiza una transformación de energía.

Según el sistema y la forma en que se almacena o transforma la energía, ésta toma diversos nombres:

1.6.1. Energía mecánica.

Se debe a la posición (energía potencial), o al estado de movimiento (energía cinética) de masas mecánicas.

1.6.2. Energía elástica.

Se debe a la tendencia de los cuerpos a recuperar su configuración inicial, después de haber sufrido una deformación. Un resorte comprimido almacena energía potencial.

1.6.3. Energía química.

Resulta de la energía que liberan diversas sustancias cuando reaccionan. Aquella se manifiesta de diversas formas: calor, efectos eléctricos (pilas), efectos mecánicos (explosión), efectos electromagnéticos (producción de luz), etc.

1.6.4. Energía térmica.

Resulta de la agitación térmica de las partículas que constituyen el sistema molecular de un cuerpo.

1.6.5. Energía solar.

Se aprovecha la energía procedente del sol (celdas solares).

1.6.6. Energía nuclear.

Se encuentra en los núcleos de los átomos de la materia en forma de energía potencial. Se manifiesta o libera al producirse transformaciones en los núcleos atómicos (radioactividad, fisión y fusión nuclear).

1.6.7. Energía eléctrica.

Se basa en la energía almacenada, cedida o transmitida por las partículas eléctricas de los átomos que originan cargas eléctricas estáticas (energía potencial), o cargas eléctricas en movimiento (corriente eléctrica).

Las formas de energía que más se utilizan en la práctica son la mecánica (fuerza motriz y tracción), térmica (hornos y calefacción) y química (reacción y combustión). La energía eléctrica raramente se aplica en su forma original. Además, tiene el inconveniente de que no puede almacenarse en grandes cantidades, y por lo tanto

debe consumirse en el mismo instante que se genera. Sin embargo, constituye la forma de energía más difundida y utilizada, lo anterior se debe a las siguientes propiedades que la hacen insustituible:

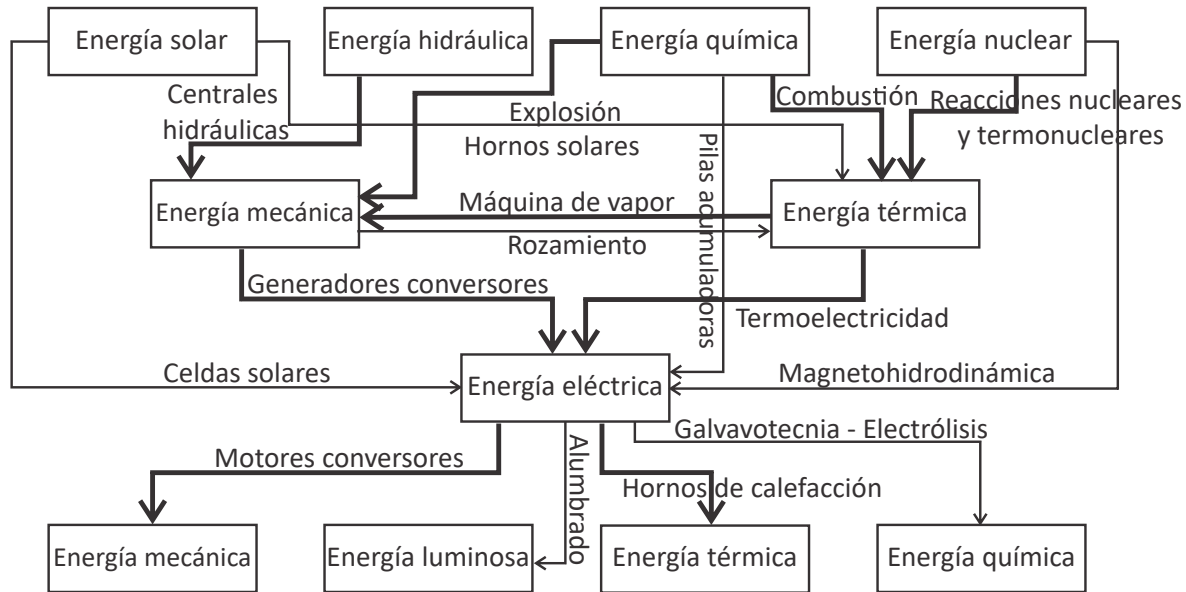


Figura 1.2 Fuentes, transformaciones y aplicación de la energía.

a. La energía potencial existente en la naturaleza (energía hidráulica, química, nuclear, etc.) se puede transformar directa o indirectamente en energía eléctrica, y ésta a su vez admite su transformación en cualquiera de las formas de energía necesarias para su aplicación, ver Fig. 1.2, donde las líneas de trazo grueso indican las vías de transformación más difundidas en la actualidad.

b. Se transporta a distancias grandes casi instantáneamente y con pocas pérdidas.

c. Se subdivide en fracciones de cualquier magnitud: la energía procedente de una gran central generadora permite su distribución para alimentar desde grandes motores hasta pequeños relés o dispositivos electrónicos de muy pequeño consumo de energía.

1.7. Conservación y degradación de la energía.

Se establece que la energía no se crea o destruye, sino simplemente que se transforma.

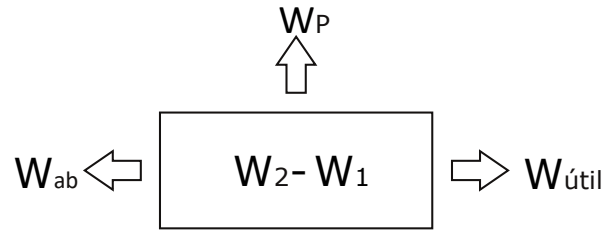


Figura 1.3 Flujo de energía en un sistema.

En rigor la ley se aplica sólo al conjunto energía - materia y es de importancia considerable, pues permite relacionar fenómenos físicos de naturaleza distinta a través de la energía que interviene en los mismos. El análisis de los problemas se simplifica, considerablemente, si se establece un balance de energía del sistema. Por otra parte, en toda transformación de energía, es inevitable que una parte de la misma se transforme en térmica no aprovechable (pérdidas). De acuerdo con el principio de conservación de la energía, la variación de ésta en un sistema del instante t_1 a t_2 , ver Fig. 1.3, obedece al siguiente balance:

$$W_2 = W_1 + W_{ab} - W_{útil} - W_P \quad (1.6)$$

Donde:

W_1 : Energía almacenada en el sistema en el instante inicial t_1 .

W_2 : Energía almacenada en el sistema en el instante final t_2 .

W_{ab} : Energía recibida por el sistema en el intervalo t_1 a t_2 .

$W_{útil}$: Energía útil cedida por el sistema en el intervalo t_1 a t_2 .

W_P : Pérdidas o energía perdida.

De la Ec. (1.6), se deduce que el flujo de energía por el sistema en el intervalo t_1 a t_2 es:

$$W_{ab} = W_{útil} + W_o + W_P \quad (1.7)$$

donde $W_o = W_2 - W_1$ es la variación del contenido energético del sistema en el intervalo t_1 a t_2 . Si $W_o = 0$ se tiene:

$$W_{ab} = W_{util} + W_P \quad (1.8)$$

1.8. Conclusión.

Existen dos clases de procesos: matemáticas - experimento y viceversa. A veces del experimento surgen matemáticas nuevas, otras veces ya han sido desarrolladas y su campo de aplicación es nuevo; también, es posible que aparezcan conceptos nuevos y las matemáticas lleven a experimentos nuevos.

2

CAPÍTULO DOS

TEORÍA GENERAL DE LOS CAMPOS Y ANÁLISIS VECTORIAL

2.1. Generalidades.

2.1.1. Escalar.

Es una cantidad que se especifica mediante su magnitud: masa, volumen, tiempo, carga eléctrica, potencial eléctrico, corriente, potencial escalar magnético, flujo magnético, resistencia, inductancia, capacitancia, etc.

$$V = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} & r \leq a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & r \geq a \end{cases} \quad \mathbb{E} = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{a}_r & r \geq a \end{cases} \quad (2.1)$$

2.1.2. Vector.

Es una cantidad que se especifica mediante su magnitud, dirección y sentido: velocidad, aceleración, fuerza, torque, campo eléctrico, polarización, desplazamiento, dipolo eléctrico, densidad de corriente, magnetización, vector potencial magnético,

dipolo magnético, inducción magnética, excitación magnética, vector de Poynting, etc.

2.1.3. Campo.

Es una cantidad física que se especifica como una función de la posición en un volumen determinado del espacio. Los campos se clasifican en escalares y vectoriales.

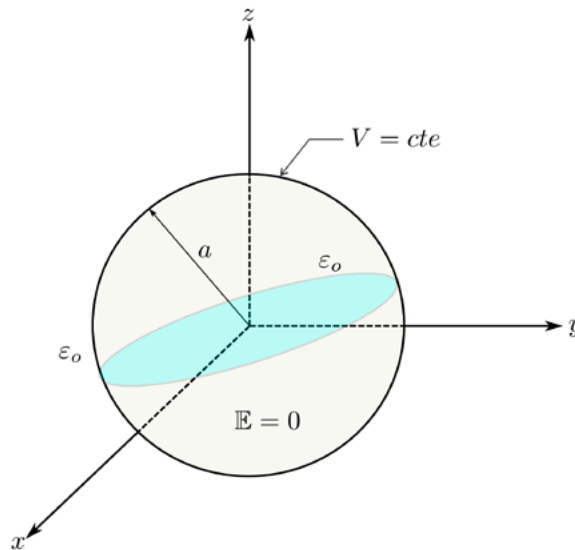


Figura 2.1 Esfera conductora en el aire.

2.1.4. Campo escalar.

Es una función de posición que se especifica mediante su magnitud en todos los puntos de un volumen del espacio: la presión atmosférica en cada punto de la superficie terrestre, la densidad del aire en los diferentes puntos de la atmósfera, el potencial eléctrico en el interior o exterior de una esfera conductora uniformemente cargada, etc. Éste, se especifica matemáticamente mediante la expresión mostrada en la Ec.(2.1), ver Fig. 2.1:

2.1.5. Campo vectorial.

Es una función de posición que se especifica mediante su magnitud, dirección y sentido en todos los puntos de un volumen del espacio: la velocidad de cada una

de las palomas que en bandada surcan el aire, la velocidad de cada una de las gotas de agua que corren por un río, el campo eléctrico en el interior y exterior de una esfera conductora que tiene una carga superficial uniformemente distribuida, etc. Éste, se especifica matemáticamente mediante la expresión mostrada en la Ec.(2.1). Un campo vectorial independiente del tiempo se denomina estacionario. El electromagnetismo se refiere al estudio de dos campos vectoriales: el Eléctrico y el Magnético.

2.2. Sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales.

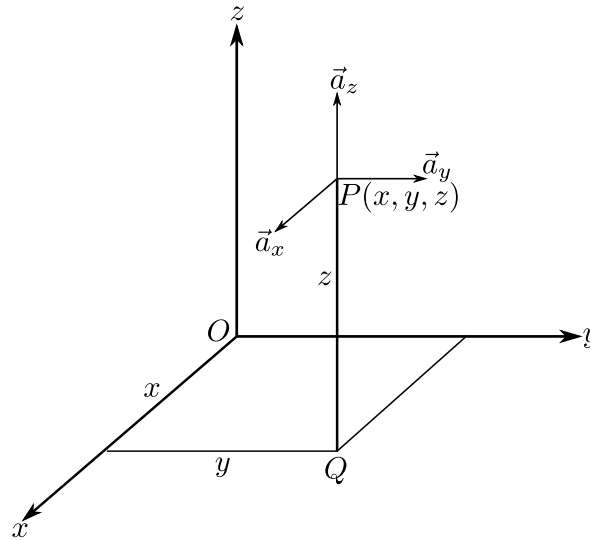


Figura 2.2 Coordenadas Cartesianas.

Un punto P se determina por tres coordenadas (u_1, u_2, u_3) , en coordenadas curvilíneas ortogonales. En el sistema cartesiano se designan por (x, y, z) , ver Fig. 2.2; en el cilíndrico por (r, φ, z) , ver Fig. 2.3 y en el esférico por (r, θ, φ) , ver Fig. 2.4.

En la Tabla 2.1 se indican las coordenadas y los coeficientes o factores métricos para los sistemas cartesiano, cilíndrico y esférico. El orden en que se especifican las coordenadas es importante y estricto, con el fin de que el sistema sea dextrógiro o de mano derecha:

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_2 \times \vec{a}_3 \quad \vec{a}_2 = \vec{a}_3 \times \vec{a}_1 \quad \vec{a}_3 = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \quad (2.2)$$

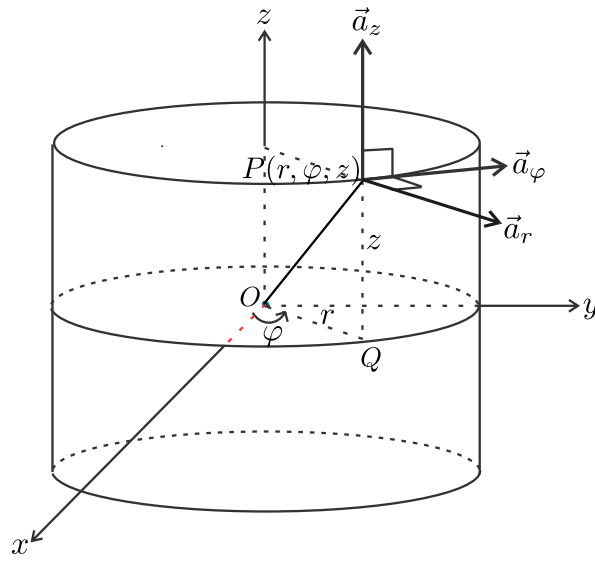


Figura 2.3 Coordenadas Cilíndricas.

Sistemas ↓	u_1	u_2	u_3	h_1	h_2	h_3
Cartesianas	x	y	z	1	1	1
Cilíndricas	r	φ	z	1	r	1
Esféricas	r	θ	φ	1	r	$r \sin \theta$

Tabla 2.1 Coordenadas y coeficientes métricos para los sistemas de pregrado.

r se usa en coordenadas cilíndricas y esféricas e indica dos medidas completamente diferentes, la primera mide la distancia desde el eje z hasta un punto en un plano normal al eje z , o sea, el radio de un cilindro; la segunda mide la distancia del origen de coordenadas al punto, o sea, el radio de una esfera. El ángulo φ es el mismo en las coordenadas cilíndricas y esféricas, es la segunda coordenada en las cilíndricas y la tercera en el caso de las esféricas. En ambos casos $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. El ángulo θ se mide desde el eje z hacia el plano xy , $0 \leq \theta \leq \pi$.

$$\vec{dl}_i = \sum_1^3 dl_i \vec{a}_i = \sum_1^3 h_i du_i \vec{a}_i \quad (2.3)$$

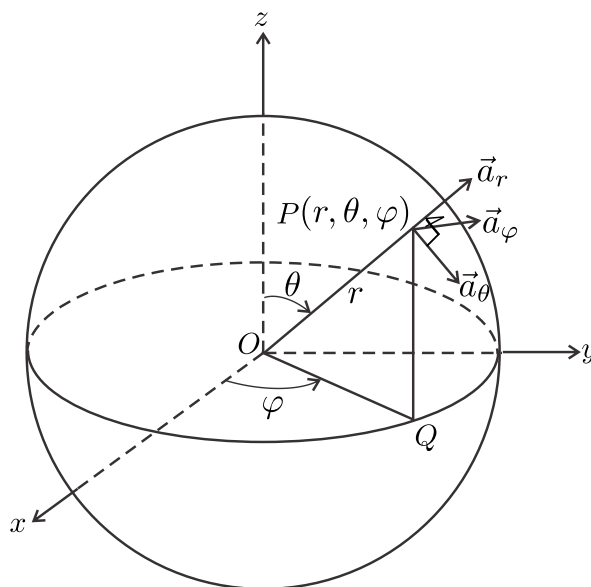


Figura 2.4 Coordenadas esféricas.

Los diferenciales de coordenada, por lo general, no son de longitud, y para obtener éstos se multiplican aquéllos por los factores o coeficientes métricos respectivos, los cuales dependen de las coordenadas, tienen unidades de longitud y se representan por el literal h , Ec.(2.3).

Un elemento de superficie se obtiene al realizar el producto de dos elementos de longitud y notar que la dirección es la de la coordenada que se mantiene constante y el sentido tiene en cuenta si la superficie es cerrada o abierta.

2.2.1. Superficie cerrada.

Ésta encierra un volumen, el sentido de $d\mathbf{S}$ es tal que se aleja del volumen. Por ejemplo, para una esfera el vector unitario de área se aleja de ella y es $\vec{a}_r$.

2.2.2. Superficie abierta.

Ésta encierra un área. Para el sentido se tiene en cuenta la regla del caminante: la periferia, el límite, el contorno, la frontera o el borde se recorre de tal modo que la superficie encerrada quede a la izquierda del caminante, los dedos de la mano derecha siguen el recorrido del contorno y el pulgar señala la dirección de $d\mathbf{S}$. Ver

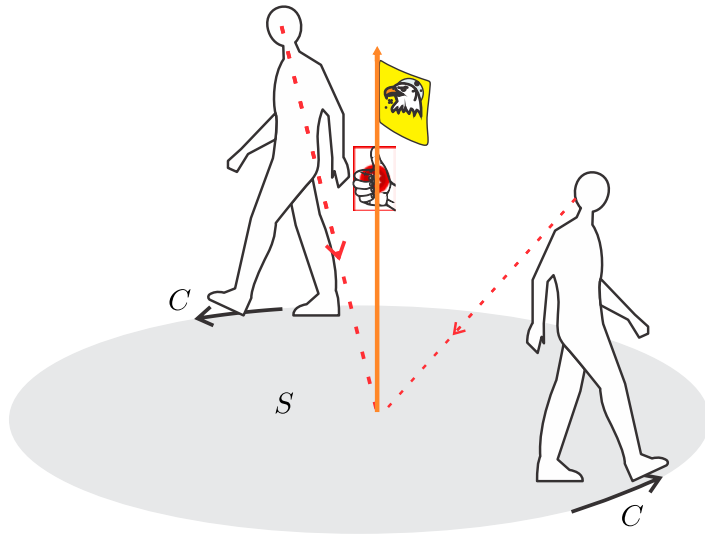


Figura 2.5 Superficie abierta y su vector asociado.

Fig. 2.5.

El elemento de volumen se obtiene al realizar el producto de los tres elementos de longitud en el sistema de coordenadas respectivo.

$$d\tau = \prod_{i=1}^3 d\ell_i = \prod_{i=1}^3 h_i du_i \quad (2.4)$$

En el sistema rectangular o cartesiano los vectores unitarios tienen direcciones fijas, independientes de la ubicación de P , lo cual no sucede en los otros dos sistemas (excepto en el caso de $\vec{a}_z$ en coordenadas cilíndricas). Lo anterior es importante en la integración y diferenciación de expresiones que involucran vectores unitarios variables.

Las componentes de un vector en coordenadas curvilíneas ortogonales son:

$$\mathbb{A} = A_1 \vec{a}_1 + A_2 \vec{a}_2 + A_3 \vec{a}_3 = \sum_1^3 A_i \vec{a}_i \quad (2.5)$$

Las componentes A_1 , A_2 y A_3 pueden ser funciones de las coordenadas en un caso particular.

Un problema de simetría cilíndrica o esférica se podrá transformar y solucionar en el sistema cartesiano, pero la solución será difícil y no mostrará la simetría.

2.2.3. Conversión de vectores de un sistema ortogonal a otro.

El sistema de coordenadas cilíndricas es importantísimo en la Ingeniería Eléctrica, debido a que la geometría de los cables de potencia o de comunicación o tomas de tierra, etc., es cilíndrica.

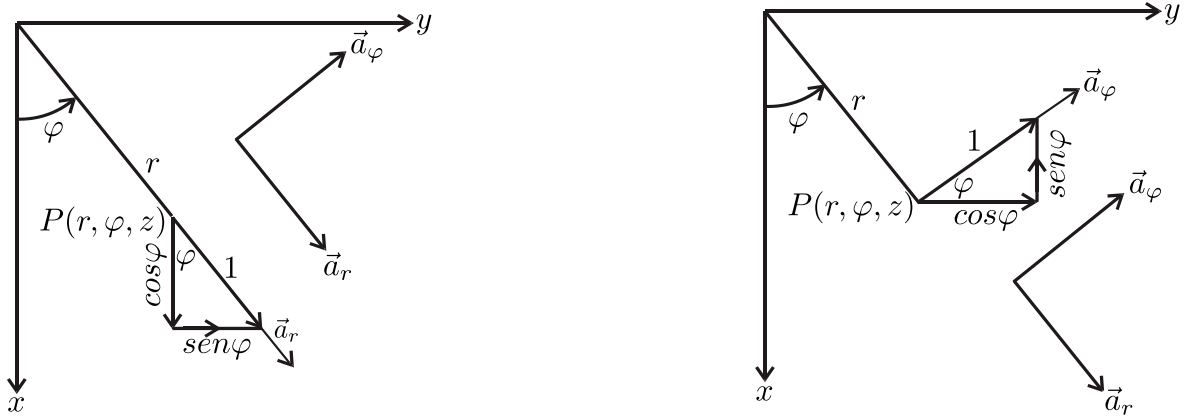


Figura 2.6 Vectores unitarios del sistema de coordenadas cilíndricas en función de los de cartesianas.

Ejemplo 1.

Expresar los vectores unitarios del sistema de coordenadas cilíndricas en función de los vectores unitarios del sistema de coordenadas cartesianas.

Solución.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x} \quad z = z \quad (2.6)$$

De la Fig. 2.3, se obtiene una vista del plano xy , la cual se puede observar en la Fig. 2.6, de ésta:

$$\vec{a}_r = \cos\varphi \vec{a}_x + \sin\varphi \vec{a}_y$$

$$\vec{a}_\varphi = -\sin\varphi \vec{a}_x + \cos\varphi \vec{a}_y$$

$$\vec{a}_z = \vec{a}_z$$

Si se reúnen las ecuaciones anteriores en forma matricial, se tiene:

$$\begin{vmatrix} \vec{a}_r \\ \vec{a}_\varphi \\ \vec{a}_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \text{sen}\varphi & 0 \\ -\text{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{a}_x \\ \vec{a}_y \\ \vec{a}_z \end{vmatrix} \quad (2.7)$$

Ejemplo 2.

Expresar los vectores unitarios del sistema de coordenadas cartesianas en función de los vectores unitarios del sistema de coordenadas cilíndricas.

Solución.

$$x = r\cos\varphi \quad y = r\text{sen}\varphi \quad z = z \quad (2.8)$$

De la Fig. 2.3, se obtiene una vista del plano xy , la cual se puede observar en la Fig. 2.7, de ésta:

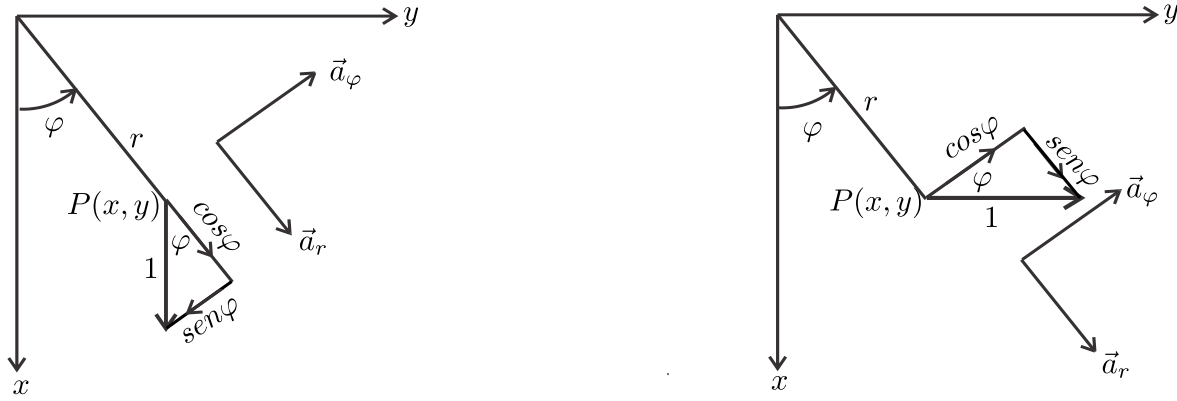


Figura 2.7 Vectores unitarios del sistema de coordenadas cartesianas en función de las cilíndricas.

$$\vec{a}_x = \cos\varphi \vec{a}_r - \text{sen}\varphi \vec{a}_\varphi$$

$$\vec{a}_y = \text{sen}\varphi \vec{a}_r + \cos\varphi \vec{a}_\varphi$$

$$\vec{a}_z = \vec{a}_z$$

Si se reúnen las ecuaciones anteriores en forma matricial, se tiene:

$$\begin{vmatrix} \vec{a}_x \\ \vec{a}_y \\ \vec{a}_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\text{sen}\varphi & 0 \\ \text{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{a}_r \\ \vec{a}_\varphi \\ \vec{a}_z \end{vmatrix} \quad (2.9)$$

Ejemplo 3.

Expresar los vectores unitarios del sistema de coordenadas esféricas en función de los vectores unitarios del sistema de coordenadas cartesianas.

Solución.

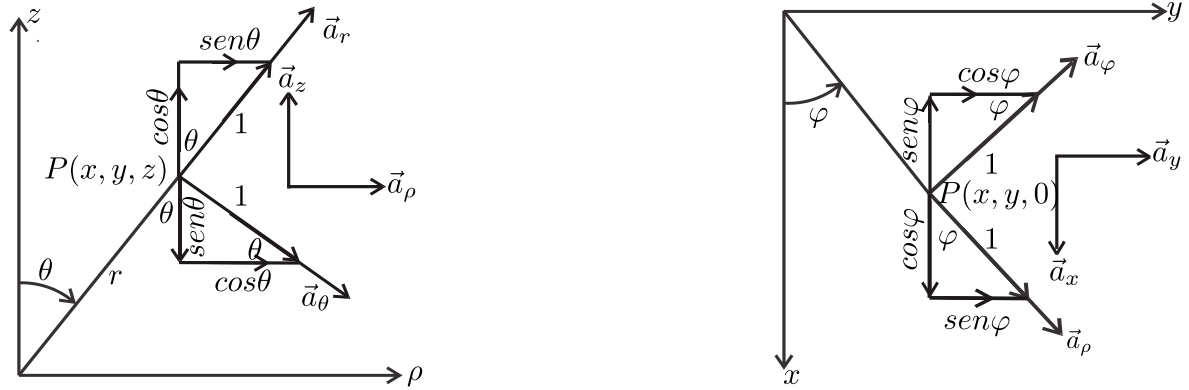


Figura 2.8 Vectores unitarios del sistema de coordenadas esféricas en función de las de cartesianas.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x} \quad \theta = \arctan \frac{z}{r} \quad (2.10)$$

De la Fig. 2.4, se obtiene una vista del plano POQ , la cual se puede observar en la Fig.2.8, de ésta:

$$\vec{a}_r = \cos\theta \vec{a}_z + \sin\theta \vec{a}_\rho$$

$$\vec{a}_\theta = \cos\theta \vec{a}_\rho - \sin\theta \vec{a}_z$$

$$\vec{a}_\varphi = -\sin\varphi \vec{a}_x + \cos\varphi \vec{a}_y$$

Pero:

$$\vec{a}_\rho = \cos\varphi \vec{a}_x + \sin\varphi \vec{a}_y, \text{ por lo tanto:}$$

$$\vec{a}_r = \cos\theta \vec{a}_z + \sin\theta (\cos\varphi \vec{a}_x + \sin\varphi \vec{a}_y)$$

$$\vec{a}_\theta = \cos\theta (\cos\varphi \vec{a}_x + \sin\varphi \vec{a}_y) - \sin\theta \vec{a}_z$$

Si se reúnen las ecuaciones anteriores en forma matricial, se tiene:

$$\begin{vmatrix} \vec{a}_r \\ \vec{a}_\theta \\ \vec{a}_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta \cos\varphi & \sin\theta \sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta \cos\varphi & \cos\theta \sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{a}_x \\ \vec{a}_y \\ \vec{a}_z \end{vmatrix} \quad (2.11)$$

Ejemplo 4.

Expresar los vectores unitarios del sistema de coordenadas cartesianas en función de los vectores unitarios del sistema de coordenadas esféricas.

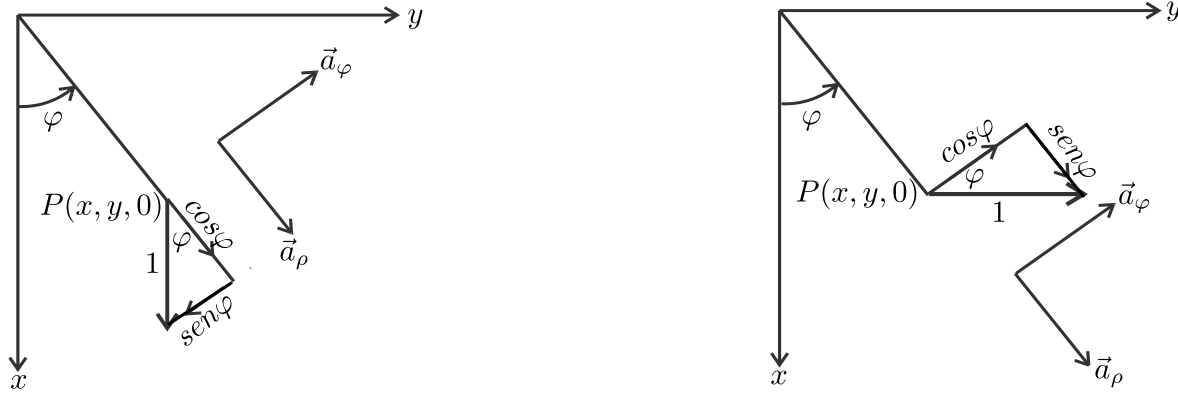


Figura 2.9 Vectores unitarios del sistema de coordenadas cartesianas en función de las de esféricas.

Solución.

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad y = r \sin \theta \sin \varphi \quad z = r \cos \theta \quad (2.12)$$

De la Fig. 2.4, se obtiene una vista del plano xy , la cual se puede observar en la Fig. 2.9, de ésta:

$$\vec{a}_r = \cos \theta \vec{a}_z + \sin \theta \vec{a}_\rho$$

$$\vec{a}_\rho = \sin \theta \vec{a}_r + \cos \theta \vec{a}_\theta$$

$$\vec{a}_x = \cos \varphi \vec{a}_\rho - \sin \varphi \vec{a}_\varphi$$

$$\vec{a}_y = \sin \varphi \vec{a}_\rho + \cos \varphi \vec{a}_\varphi$$

Pero:

$$\vec{a}_x = \cos \varphi (\sin \theta \vec{a}_r + \cos \theta \vec{a}_\theta) - \sin \varphi \vec{a}_\varphi$$

$$\vec{a}_y = \sin \varphi (\sin \theta \vec{a}_r + \cos \theta \vec{a}_\theta) + \cos \varphi \vec{a}_\varphi$$

$$\vec{a}_z = \cos \theta \vec{a}_r - \sin \theta \vec{a}_\theta$$

Si se reúnen las ecuaciones anteriores en forma matricial, se tiene:

$$\begin{vmatrix} \vec{a}_x \\ \vec{a}_y \\ \vec{a}_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{a}_r \\ \vec{a}_\theta \\ \vec{a}_\varphi \end{vmatrix} \quad (2.13)$$

2.3. Análisis vectorial.

El análisis vectorial se hizo necesario con el desarrollo de la Teoría Electromagnética de Maxwell, al considerar la importancia de la naturaleza vectorial de los campos eléctrico y magnético.

Hasta 1956 se pensó que las leyes de la Física eran invariantes. Ese año se llevaron a cabo experimentos relacionados con la desintegración de ciertas partículas elementales, en los cuales se halló que para expresar los resultados de los experimentos incidía el sistema de coordenadas que se usara, o sea, el experimento y su imagen en un espejo dan resultados diferentes. Este resultado condujo a reexaminar lo relativo a la simetría de las leyes físicas.

2.3.1. Vector libre.

Es aquel para el cual no interesa el punto de aplicación. Si dos vectores libres con puntos de aplicación diferentes conservan su magnitud, dirección y sentido son equivalentes. En Electromagnetismo se trabajará con esta clase de vectores.

2.3.2. Vector fijo.

Es aquel para el cual el punto de aplicación del vector es solamente uno. Se varían los efectos si se cambia el punto de aplicación.

2.3.3. Vector unitario.

El vector unitario del vector $\mathbb{A}$, es aquel cuya magnitud es uno y tiene la misma dirección y sentido del vector. Por definición:

$$\vec{a} \triangleq \frac{\mathbb{A}}{A} \quad (2.14)$$

2.3.4. Producto de un escalar por un vector.

Si $\mathbb{A}$ es un campo vectorial y V un campo escalar, $V(\mathbb{A})$ no es necesariamente un múltiplo simple del campo original.

$$V(\vec{\mathbb{A}}) = V\vec{\mathbb{A}}$$

2.3.5. Suma.

Dos vectores pueden sumarse y cumplen las siguientes leyes:

Clausurativa	$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \mathbb{C}$
Conmutativa	$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \mathbb{B} + \mathbb{A}$
Asociativa	$(\mathbb{A} + \mathbb{B}) + \mathbb{C} = \mathbb{A} + (\mathbb{B} + \mathbb{C})$
Elemento Neutro	$\mathbb{A} + \mathbb{O} = \mathbb{A}$
Elemento Inverso	$\mathbb{A} + \mathbb{Z} = \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{Z} = -\mathbb{A}$
Sustracción	$\mathbb{A} + (-\mathbb{B}) = \mathbb{A} - \mathbb{B}$

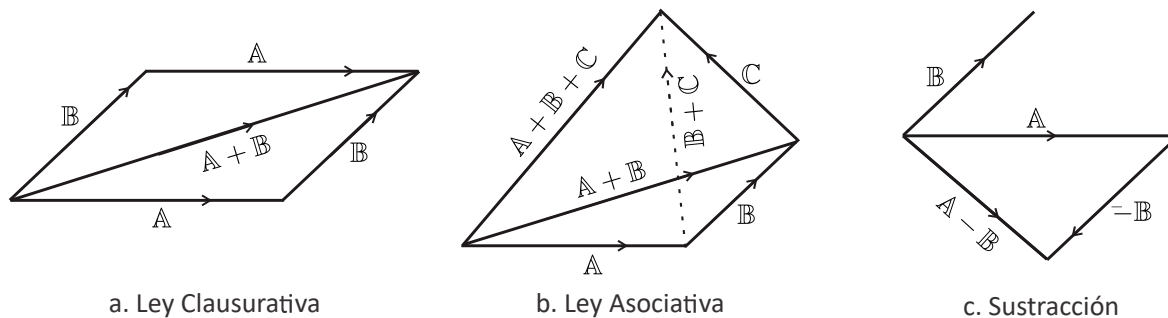


Figura 2.10 Ejemplos sobre leyes de la suma.

2.3.6. Producto escalar, punto o interno.

El producto escalar de dos vectores se define como el producto de sus magnitudes por el coseno del ángulo entre ellos. Su nombre proviene de la naturaleza escalar del resultado.

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \triangleq AB \cos \alpha \quad (2.15)$$

$B\cos\alpha$ es la proyección del vector $\mathbb{B}$ sobre el vector $\mathbb{A}$. Lo cual da lugar a la siguiente interpretación geométrica: es el producto de la magnitud de uno de los vectores por la proyección del otro sobre él, ver Fig. 2.11.

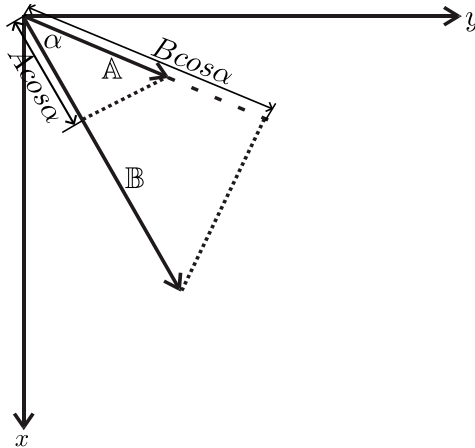


Figura 2.11 Interpretación geométrica del producto punto.

El producto escalar tiene las siguientes propiedades:

- Es conmutativa: $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = \mathbb{B} \cdot \mathbb{A}$
- Si $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = 0$ y $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son diferentes de cero, $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son ortogonales.
- Es distributivo: $\mathbb{A} \cdot (\mathbb{B} + \mathbb{C}) = \mathbb{A} \cdot \mathbb{B} + \mathbb{A} \cdot \mathbb{C}$
- Mediante componentes de los vectores $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$, el producto escalar en coordenadas curvilíneas ortogonales es

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = \sum_1^3 A_i B_i \quad (2.16)$$

donde:

$$\mathbb{A} = \sum_1^3 A_i \vec{a}_i \quad \mathbb{B} = \sum_1^3 B_i \vec{a}_i \quad (2.17)$$

- Es invariante, o sea, una cantidad escalar que es independiente del sistema de coordenadas, no se altera con respecto a la translación o rotación de los ejes coordenados.

2.3.7. Producto vectorial, cruz o externo.

El producto vectorial de dos vectores se define como el producto de sus magnitudes por el seno del ángulo entre ellos, el sentido lo determina la regla de la mano derecha y la dirección es normal al plano que contiene a éstos. Su nombre proviene de la naturaleza vectorial del resultado.

$$\mathbb{A} \times \mathbb{B} \triangleq AB \operatorname{sen} \alpha \vec{a}_N \quad (2.18)$$

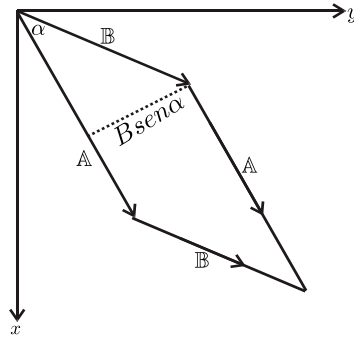


Figura 2.12 Interpretación geométrica del producto vectorial.

El significado geométrico del producto vectorial es el área de un paralelogramo cuyos lados son las magnitudes de los vectores $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$, de la definición $B \operatorname{sen} \alpha$ es la altura del paralelogramo que tiene como lados las magnitudes de los vectores $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$, ver Fig. 2.12. El producto vectorial tiene las siguientes propiedades:

- No es conmutativo: $\mathbb{A} \times \mathbb{B} \neq \mathbb{B} \times \mathbb{A} \quad \rightarrow \quad \mathbb{A} \times \mathbb{B} = -\mathbb{B} \times \mathbb{A}$
- Si m es un escalar: $m(\mathbb{A} \times \mathbb{B}) = m\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \mathbb{A} \times m\mathbb{B}$
- Si $\mathbb{A} \times \mathbb{B} = 0$ y $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son diferentes de cero, $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ tienen la misma dirección y el mismo sentido u opuesto.
- Es distributivo: $\mathbb{A} \times (\mathbb{B} + \mathbb{C}) = \mathbb{A} \times \mathbb{B} + \mathbb{A} \times \mathbb{C}$
- Mediante componentes de los vectores $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$, el producto vectorial en coordenadas curvilíneas ortogonales es:

$$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \begin{vmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \quad (2.19)$$

- Es invariante.

2.3.8. Producto triple escalar.

Su nombre proviene del resultado escalar del triple producto y se define así $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$

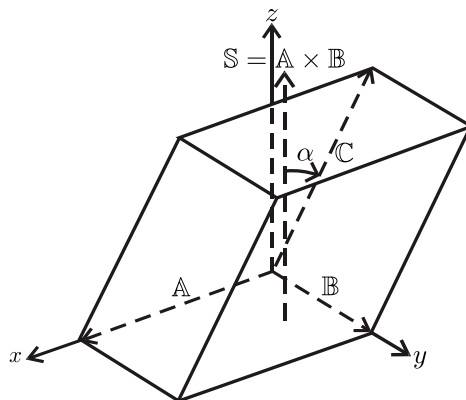


Figura 2.13 Interpretación geométrica del producto triple escalar.

El significado geométrico del producto triple escalar es precisamente el de un volumen de un paralelepípedo cuyos lados son las magnitudes de los vectores $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$. Ver Fig. 2.13.

$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$: Área del paralelogramo cuyos lados son las magnitudes de los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.

$\mathbf{C} \cdot \vec{a}_N$: altura del paralelepípedo.

$\tau = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| \mathbf{C} \cdot \vec{a}_N$: volumen del paralelepípedo cuyos lados son las magnitudes de los vectores $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$.

Si α es el ángulo entre los vectores área y altura, el producto triple escalar tiene las siguientes propiedades:

- Si $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \rightarrow \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} > 0$.
- Si $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi \rightarrow \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} < 0$.
- Si $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = 0$ y $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son diferentes de cero, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son coplanares.
- El punto y la cruz se intercambian, sin afectar el resultado: $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$
- Cualquier permutación cíclica de los vectores $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ y en el producto triple escalar no afecta el resultado: $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B} \times \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{C} \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$
- Mediante componentes de los vectores, el producto triple escalar en coordenadas curvilíneas ortogonales, se expresa así:

$$\mathbb{A} \times \mathbb{B} \cdot \mathbb{C} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \quad (2.20)$$

g. Es invariante.

2.3.9. Producto triple vectorial.

Su nombre proviene del resultado vectorial del triple producto, se define así:

$$\mathbb{A} \times (\mathbb{B} \times \mathbb{C}) = (\mathbb{A} \cdot \mathbb{C})\mathbb{B} - (\mathbb{A} \cdot \mathbb{B})\mathbb{C} \quad (2.21)$$

$$(\mathbb{A} \times \mathbb{B}) \times \mathbb{C} = \mathbb{B}(\mathbb{A} \cdot \mathbb{C}) - \mathbb{A}(\mathbb{B} \cdot \mathbb{C}) \quad (2.22)$$

Para trabajar con operadores, los vectores $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ anteceden a $\mathbb{C}$.

2.3.10. Diferenciación de vectores.

Las reglas para derivar funciones vectoriales son semejantes a las correspondientes para funciones escalares. Por ejemplo, para derivar el producto vectorial se conserva el orden de los factores, ya que el producto vectorial no es conmutativo.

2.4. Gradiente.

Si en un volumen τ limitado por una superficie cerrada S y W un campo escalar que cumple las siguientes condiciones:

- función continua de posición
- diferenciable
- tiene un solo valor en cada punto

se dice que W satisface las condiciones de un campo físico. En Teoría Electromagnética se tiene el campo físico V , llamado el potencial escalar eléctrico.

Una superficie equipotencial consta de aquellos puntos donde V es constante, V_o . Al asignar diversos valores a V_o se obtiene una familia de superficies equipotenciales.

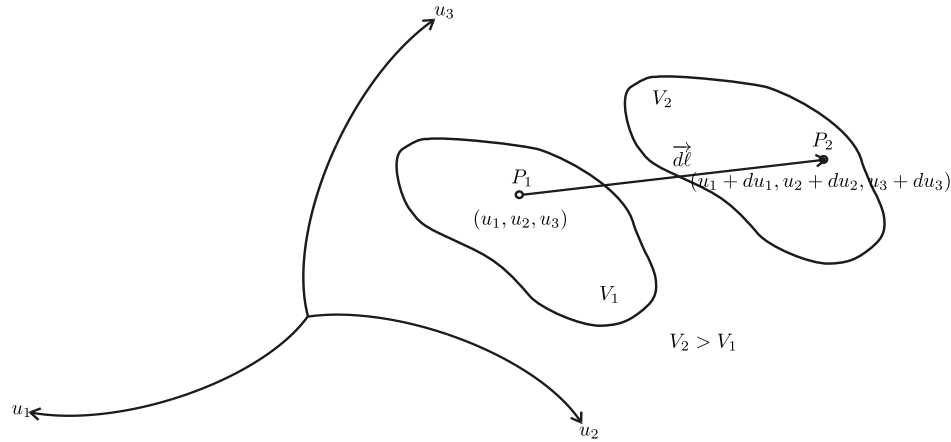


Figura 2.14 Variación de la función V en un desplazamiento infinitesimal del punto.

Por lo tanto, dos de éstas no se intersectan ya que V solamente tiene un valor en cada punto.

2.4.1. Cálculo del gradiente en coordenadas curvilíneas ortogonales.

Se estudiará cómo varía la función V en un desplazamiento diferencial del punto. De las matemáticas se sabe que la derivada total de V es:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial V}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial V}{\partial u_3} du_3$$

$$dV = \frac{1}{h_1} \frac{\partial V}{\partial u_1} h_1 du_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial V}{\partial u_2} h_2 du_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial V}{\partial u_3} h_3 du_3 \quad (2.23)$$

$$\vec{dl} = h_1 du_1 \vec{a}_1 + h_2 du_2 \vec{a}_2 + h_3 du_3 \vec{a}_3 \quad (2.24)$$

$$\nabla V = \frac{1}{h_1} \frac{\partial V}{\partial u_1} \vec{a}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial V}{\partial u_2} \vec{a}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial V}{\partial u_3} \vec{a}_3 \quad (2.25)$$

De modo más general:

$$\nabla V \triangleq \sum_1^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial V}{\partial u_i} \vec{a}_i \quad (2.26)$$

h_1 : coeficiente o factor métrico

$\vec{a}_i$: vector unitario en la dirección i

∇ : operador nabla o del. Actúa sobre un campo escalar transformándolo en un vector.

La derivada total se expresa también como:

$$dV = \nabla V \cdot \vec{d\ell} = \nabla V \cdot d\ell \vec{a}_\ell$$

$$\frac{dV}{d\ell} = \nabla V \cdot \vec{a}_\ell = \nabla V \cos \gamma \quad (2.27)$$

$\frac{dV}{d\ell}$: derivada direccional o variación de V en la dirección $\vec{d\ell}$

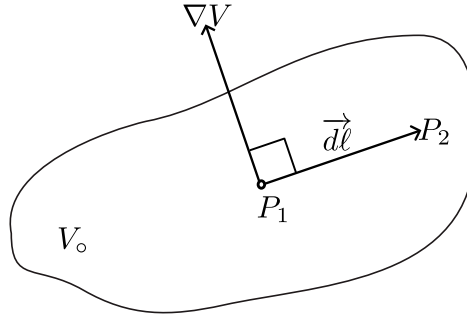


Figura 2.15 Gradiente en un punto de una superficie equipotencial.

Si $\cos \gamma = 1$, la derivada direccional es máxima para $\gamma = 0$, en otras palabras ∇V y $\vec{d\ell}$ tienen la misma dirección. ∇V es un vector cuya magnitud y dirección son los mismos de la derivada direccional máxima de V .

$$\nabla V = \left. \frac{dV}{d\ell} \right|_{Máx} \quad (2.28)$$

Si P_1 y P_2 están en la misma superficie equipotencial, entonces $dV = \nabla V \cdot \vec{d\ell} = 0$, lo cual significa que el gradiente ∇V es normal a la superficie equipotencial en P_1 . O sea, ∇V es normal a $\vec{d\ell}$.

El gradiente de un campo escalar es un vector que tiene las siguientes propiedades:

a. Las componentes en cada punto, son la razón de cambio de V en una coordenada dada por el inverso del factor métrico correspondiente.



a. Gradiente en un punto de un plano.

b. Gradiente en un punto de una curva de nivel.

Figura 2.16 Ejemplos prácticos de gradiente.

- b. La magnitud es equivalente a la de la derivada direccional máxima.
- c. La dirección es de máxima variación.
- d. El sentido es aquel en que crece la función.
- e. Es invariante.

En la Fig. 2.16a. la flecha indica un vector normal al plano ABC, o sea el gradiente. En la Fig. 2.16b. se muestra el mapa topográfico de una colina. Los valores indican la altura en metros. El gradiente de la altura es la pendiente de la colina en el punto considerado y lleva el sentido de aumento de la altura. La flecha indica el gradiente en un punto de 100[m] de altura.

2.5. Flujo.

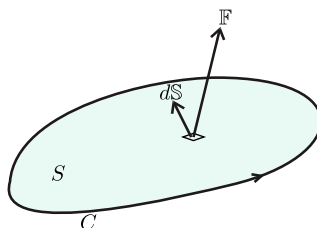


Figura 2.17 Flujo elemental.

El flujo elemental $d\varphi$ de un vector a través de una superficie infinitesimal dS , ver Fig. 2.17, se define como:

$$d\varphi \triangleq \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S}$$

El flujo total para una superficie finita se halla integrando sobre la superficie S :

$$\varphi \triangleq \int_S \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} \quad (2.29)$$

La Ec. (2.29) es invariante. Cuando la superficie S es cerrada, la integral se denomina el flujo neto y se escribe así:

$$\varphi \triangleq \oint_S \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} \quad (2.30)$$

2.6. Divergencia.

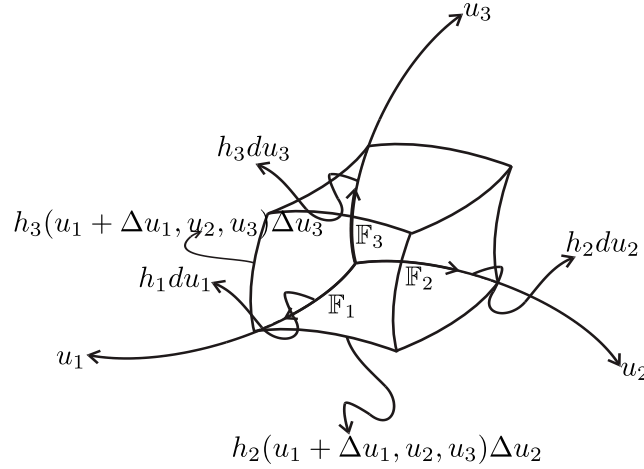


Figura 2.18 Divergencia en coordenadas curvilíneas ortogonales.

A cada punto de un volumen τ limitado por una superficie cerrada S se asocia una cantidad escalar llamada divergencia, definida por:

$$\nabla \cdot \mathbb{F} \triangleq \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S}}{\Delta\tau} \quad (2.31)$$

La Ec. (2.31) expresa el flujo neto del campo vectorial a través de la superficie S que encierra un volumen τ por unidad de volumen cuando éste tiende a cero. Si

la divergencia de un campo es cero para un volumen pequeño, el flujo que entra a éste es igual al que sale y se dice que aquél no tiene fuentes o no es origen de campo ni tiene sumideros.

2.6.1. Cálculo de la divergencia en coordenadas curvilíneas ortogonales.

$$\oint_S \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} = \sum_{i=1}^6 \int_{S_i} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} \quad (2.32)$$

i. cada una de las caras del elemento de volumen mostrado en la Fig. 2.18.

El flujo a través de las caras frontal y trasera es:

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & F_1(u_1 + \Delta u_1, u_2, u_3) h_3(u_1 + \Delta u_1, u_2, u_3) \Delta u_3 h_2(u_1 + \Delta u_1, u_2, u_3) \Delta u_2 \\ & - F_1(u_1, u_2, u_3) h_3(u_1, u_2, u_3) \Delta u_3 h_2(u_1, u_2, u_3) \Delta u_2 \end{aligned}$$

$$F_1(u_1 + \Delta u_1, u_2, u_3) \approx F_1(u_1, u_2, u_3) + \frac{\partial F_1}{\partial u_1} \Delta u_1 + \dots$$

$$h_2(u_1 + \Delta u_1, u_2, u_3) \approx h_2(u_1, u_2, u_3) + \frac{\partial h_2}{\partial u_1} \Delta u_1 + \dots$$

$$h_3(u_1 + \Delta u_1, u_2, u_3) \approx h_3(u_1, u_2, u_3) + \frac{\partial h_3}{\partial u_1} \Delta u_1 + \dots$$

Al sustituir estos valores en la Ec. (2.32) para las caras delantera y trasera, luego de reducir términos semejantes y despreciar los de orden superior, se obtiene:

$$\begin{aligned} \varphi_1 & \approx \left(h_2 h_3 \frac{\partial F_1}{\partial u_1} + h_2 F_1 \frac{\partial h_3}{\partial u_1} + h_3 F_1 \frac{\partial h_2}{\partial u_1} \right) \Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3 \\ \varphi_1 & \approx \frac{\partial (h_2 h_3 F_1)}{\partial u_1} \frac{h_1 \Delta u_1 h_2 \Delta u_2 h_3 \Delta u_3}{h_1 h_2 h_3} \approx \frac{\Delta \tau}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial (h_2 h_3 F_1)}{\partial u_1} \end{aligned}$$

ii. De modo similar se obtiene el flujo para las caras izquierda y derecha:

$$\varphi_2 \approx \frac{\Delta \tau}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial (h_1 h_3 F_2)}{\partial u_2}$$

y para las caras superior e inferior:

$$\varphi_3 \approx \frac{\Delta \tau}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial (h_1 h_2 F_3)}{\partial u_3}$$

Por lo tanto, el flujo total es:

$$\varphi \approx \frac{\Delta\tau}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial (h_2 h_3 F_1)}{\partial u_1} + \frac{\partial (h_1 h_3 F_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial (h_1 h_2 F_3)}{\partial u_3} \right] \quad (2.33)$$

Si se aplica la definición de la divergencia, se tiene:

$$\nabla \cdot \mathbb{F} \triangleq \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3 F_i}{h_i} \right) \quad (2.34)$$

En electrostática

$$\nabla \cdot \mathbb{D} = \rho \quad (2.35)$$

donde:

$\mathbb{D}$: vector desplazamiento

ρ : densidad de carga volumétrica

Si el divergente del vector desplazamiento es:

- mayor que cero, el volumen pequeño que rodea al punto contiene fuentes o cargas de naturaleza positiva y se dice que el flujo diverge.
- menor que cero, el volumen pequeño contiene sumideros o cargas de naturaleza negativa y se dice que el flujo converge.
- igual a cero, el volumen pequeño no contiene fuentes ni sumideros y el flujo que va de las cargas positivas a las negativas no se pierde en el espacio entre ellas.

En los campos electrostáticos existe una correspondencia entre el divergente mayor que cero y las fuentes o cargas positivas; el flujo por definición se origina en las cargas positivas. Una correspondencia similar existe entre la divergencia menor que cero y los sumideros o cargas negativas, el flujo termina en las cargas negativas.

En magnetostática y magnetodinámica:

$$\nabla \cdot \mathbb{B} = 0 \quad (2.36)$$

donde:

$\mathbb{B}$: inducción magnética o densidad de campo magnético.

En este caso el divergente del vector densidad de campo magnético es cero y por lo tanto no existen fuentes o sumideros o cargas magnéticas independientes, éstas

existen en parejas y sus líneas de campo son cerradas y continuas.

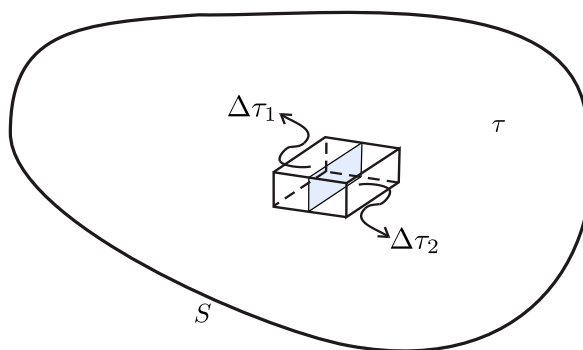


Figura 2.19 Teorema de Gauss

2.6.2. Teorema de la divergencia o de Gauss.

El teorema de la divergencia o de Gauss se obtiene al ampliar el concepto de la divergencia a un volumen finito. Si $\mathbb{F}$ es una función vectorial continua en un volumen τ limitado por una superficie cerrada S y el volumen se divide en N subvolúmenes $\Delta\tau_1, \Delta\tau_2, \dots, \Delta\tau_N$

En la Fig. 2.19 sólo se muestran dos elementos de volumen ampliados, entonces:

$$\oint_S \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \nabla \cdot \mathbb{F} \Delta\tau$$

Al evaluar el primer miembro de la igualdad anterior, se nota que el flujo correspondiente a la cara que separa $\Delta\tau_1$ y $\Delta\tau_2$ se anula, ya que si sale de $\Delta\tau_1$ entra a $\Delta\tau_2$ y queda solo el flujo a través de la superficie que encierra a $\Delta\tau_1 + \Delta\tau_2$, o sea:

$$\oint_S \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} = \int_{\Delta S_1} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} + \int_{\Delta S_2} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S}$$

Donde ΔS_1 y ΔS_2 son los elementos de superficie que limitan los infinitesimales de los volúmenes $\Delta\tau_1$ y $\Delta\tau_2$, sin incluir la superficie adyacente a ellos, la cual se sombrea en la Fig. 2.19. Si se suma para todos los elementos de volumen que conforman el volumen τ , se tendrá el flujo neto a través de la superficie S :

$$\oint_S \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \int_{\Delta S_i} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S}$$

Por definición de la integral, se establece:

$$\oint_S \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \nabla \cdot \mathbb{F} \Delta\tau$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_1^{\infty} \nabla \cdot \mathbb{F} \Delta \tau_i \triangleq \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbb{F} d\tau$$

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \mathbb{F} d\tau = \oint_s F \cdot d\mathbb{S} \quad (2.37)$$

La Ec. (2.37) se denomina el teorema de Gauss o de la divergencia, establece que la integral de la divergencia del campo vectorial $\mathbb{F}$ a través del volumen τ limitado por la superficie cerrada S es equivalente al flujo neto a través de ésta. El teorema de Gauss se aplica tanto a campos estáticos como a campos variables en el tiempo y en cualquier sistema de coordenadas y se utiliza a menudo para convertir la integral de volumen de la divergencia de un campo vectorial en una de superficie cerrada. También, tiene aplicación cuando hay simetría en el sistema de coordenadas.

2.6.3. Laplaciano escalar.

Un campo escalar V se llama armónico si es continuo, tiene segundas derivadas parciales y satisface la ecuación de Laplace. En coordenadas curvilíneas ortogonales el laplaciano escalar se obtiene al hallar el divergente del gradiente:

$$\nabla \cdot \nabla V \triangleq \nabla^2 V \quad (2.38)$$

Si se reemplaza el valor correspondiente al gradiente, se obtiene:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_1^3 \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2} \frac{\partial V}{\partial u_i} \right) \quad (2.39)$$

1. Si $\nabla^2 V = 0$ Ecuación de Laplace
2. Si $\nabla^2 V \neq 0$ Ecuación de Poisson
3. ∇^2 Laplaciano Escalar

2.7. Líneas de campo.

Una línea de campo es la curva cuya tangente en cualquier punto da la dirección del campo vectorial en ese punto para un instante dado. En un campo uniforme, las líneas de campo no varían con el tiempo y coinciden con las trayectorias.

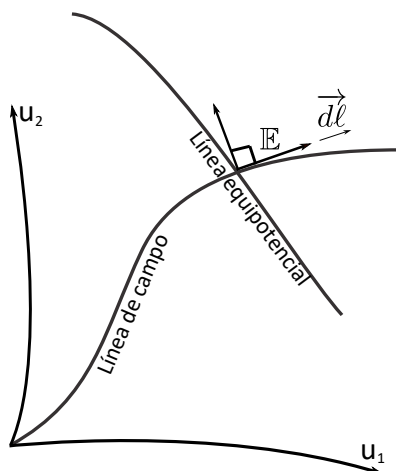


Figura 2.20 Ortogonalidad de las líneas de campo y equipotenciales.

En la Fig. 2.20 el elemento $\vec{d\ell}$ de la línea de campo o gradiente es paralelo a $\mathbb{E}$ en el punto P. Por ser dos vectores paralelos las componentes de $\mathbb{E}$ y $\vec{d\ell}$ son proporcionales. Así, las líneas de campo están determinadas por la ecuación: $\vec{d\ell} = k\mathbb{E}$.

$$\sum_1^3 h_i du_i \vec{a}_i = k E_i \vec{a}_i$$

$$\frac{E_i}{h_i du_i} = k \rightarrow \frac{E}{E_i} = \frac{d\ell}{d\ell_i} \quad (2.40)$$

2.8. Líneas de nivel o equipotenciales.

Una línea de nivel es la curva que es ortogonal a una línea de campo. En la Fig. 2.20, se indica que las líneas de nivel y gradiente son ortogonales en el punto P. Por lo tanto, las líneas de nivel están determinadas por:

$$\frac{E}{E_i} = -\frac{d\ell_i}{d\ell} \quad (2.41)$$

Ejemplo 5.

R es la distancia desde un punto fijo $P(x_1, y_1, z_1)$ a otro cualquiera $Q(x, y, z)$, hallar ∇V y $\nabla^2 V$, si $V = R^n$.

Solución.

De la Fig. 2.21:

$$\mathbb{R} = (x - x_1)\vec{a}_x + (y - y_1)\vec{a}_y + (z - z_1)\vec{a}_z$$

$$R = [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2]^{\frac{1}{2}}$$

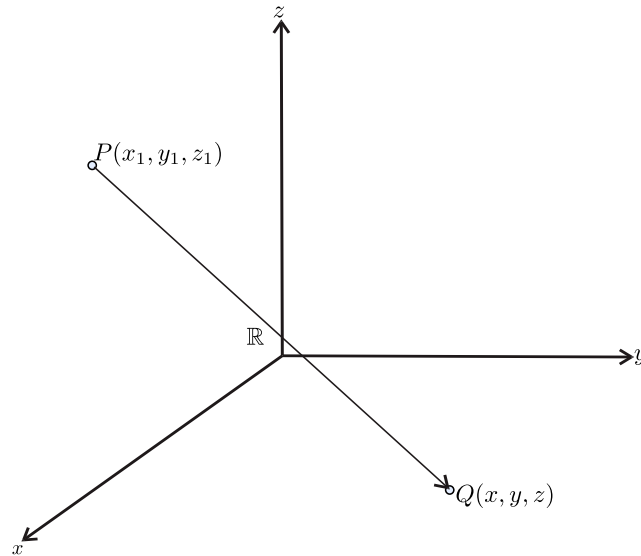


Figura 2.21 Cálculo de ∇R^n .

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{a}_z$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial R} \left(\frac{\partial R}{\partial x}\vec{a}_x + \frac{\partial R}{\partial y}\vec{a}_y + \frac{\partial R}{\partial z}\vec{a}_z \right)$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{2(x - x_1)}{((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x - x_1}{R}$$

De modo similar:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{y - y_1}{R} \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{z - z_1}{R}$$

Por lo tanto:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial R} \left(\frac{x - x_1}{R}\vec{a}_x + \frac{y - y_1}{R}\vec{a}_y + \frac{z - z_1}{R}\vec{a}_z \right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial R} = nR^{n-1}$$

$$\begin{aligned}\nabla V &= \frac{nR^{n-1}}{R} [(x - x_1)\vec{a}_x + (y - y_1)\vec{a}_y + (z - z_1)\vec{a}_z] \\ \nabla R^n &= nR^{n-2}\mathbb{R}\end{aligned}\tag{2.42}$$

Para $n = -1$:

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -R^{-3}\mathbb{R} = -\frac{\mathbb{R}}{R^3} = -\frac{\vec{a}_R}{R^2}\tag{2.43}$$

Para obtener el laplaciano escalar, se sabe que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= nR^{n-2}(x - x_1) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = nR^{n-2} + n(n-2)R^{n-3}(x - x_1)\frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= nR^{n-2} \left[1 + (n-2)R^{-1}(x - x_1)\frac{x - x_1}{R} \right] \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= nR^{n-2} \left[1 + \frac{(n-2)(x - x_1)^2}{R^2} \right]\end{aligned}$$

De modo similar se obtienen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= nR^{n-2} \left[1 + \frac{(n-2)(y - y_1)^2}{R^2} \right] \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = nR^{n-2} \left[1 + \frac{(n-2)(z - z_1)^2}{R^2} \right] \\ \nabla^2 V &= nR^{n-2} \left[3 + \frac{(n-2)R^2}{R^2} \right] \\ \nabla^2 V &= n(n+1)R^{n-2}\end{aligned}\tag{2.44}$$

Para $n = -1$, caso usual en teoría de campos:

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) = 0 \quad \forall \quad R \neq 0\tag{2.45}$$

2.9. Ángulo sólido.

El ángulo sólido, según el cual se ve una superficie abierta desde un punto P es:

$$\Omega \triangleq \int_S \frac{\vec{a}_R \cdot d\mathbb{S}}{R^2}\tag{2.46}$$

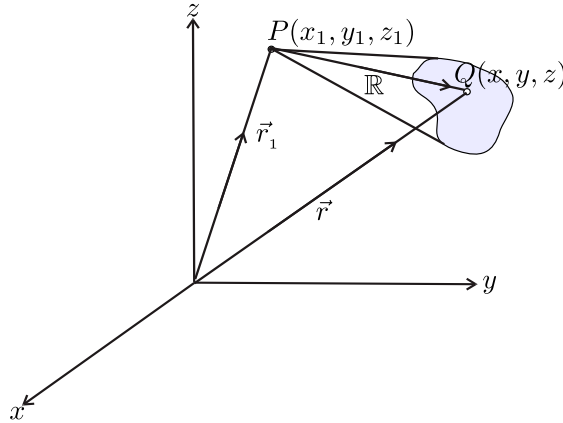


Figura 2.22 Ángulo sólido.

Si la superficie S es cerrada, la Ec. (2.43) para el ángulo sólido se puede escribir así:

$$\Omega \triangleq \oint_S \frac{\vec{a}_R \cdot d\mathbf{S}}{R^2} \quad (2.47)$$

Si se aplica el teorema de Gauss, a la expresión anterior se obtiene:

$$\Omega \triangleq \oint_S \frac{\vec{a}_R}{R^2} \cdot d\mathbf{S} = \int_\tau \nabla \cdot \frac{\vec{a}_R}{R^2} d\tau$$

Se consideran tres casos de interés:

1. El punto P está fuera del volumen limitado por la superficie S .

En este caso $R \neq 0$.

$$\nabla \cdot \nabla \left(\frac{1}{R} \right) = \nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) = 0 \quad \forall \quad R \neq 0 \longrightarrow \Omega = 0 \quad (2.48)$$

2. El punto P está dentro del volumen τ limitado por la superficie S .

Puede ocurrir que $R = 0$, o sea que los puntos P y Q coinciden. En este caso el integrando se hace infinito y se dice que allí existe una singularidad. Sin embargo, la integral puede evaluarse y tiene un valor finito. Para evaluar la integral se procede de la siguiente manera:

- Con centro en P se construye una esfera pequeña de radio R_o , la cual se extrae del volumen, de este modo el punto queda fuera del volumen.
- El volumen queda limitado por las superficies S_o y S , como se muestra en la

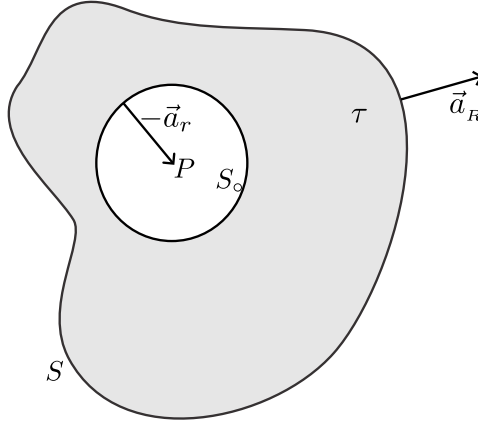


Figura 2.23 Cálculo del ángulo sólido cuando el punto P está dentro de un volumen.

Fig. 2.23.

$$\oint_S \frac{\vec{a}_R \cdot d\vec{S}}{R^2} = \int_S \frac{\vec{a}_R \cdot d\vec{S}}{R^2} + \int_{S_o} \frac{\vec{a}_R \cdot d\vec{S}}{R^2} = 0$$

Ya que el punto P está fuera del volumen limitado por las superficies S_o y S :

$$\begin{aligned} \int_S \frac{\vec{a}_R \cdot d\vec{S}}{R^2} &= - \int_{S_o} \frac{\vec{a}_R \cdot d\vec{S}}{R^2} \\ - \int_{S_o} \frac{\vec{a}_R \cdot d\vec{S}}{R^2} &= - \frac{1}{R_o} \int (-\vec{a}_R) \cdot d\vec{S} \vec{a}_R = \frac{4\pi R_o^2}{R_o^2} \end{aligned}$$

$$\Omega = 4\pi \quad (2.49)$$

3. El punto P está sobre la superficie S que limita al volumen τ .

El ángulo sólido es un concepto usado en la teoría del campo eléctrico y la inducción magnética por algunos autores.

Se tienen tres valores diferentes para el ángulo sólido de acuerdo al punto de observación, a continuación éstos se detallan:

$$\Omega = \begin{cases} 0 & \forall \quad R \neq 0 \\ 4\pi & \forall \quad R = 0 \\ 2\pi & P \text{ pertenece a la superficie } S \text{ que limita al volumen } \tau \end{cases} \quad (2.50)$$

Si una superficie cerrada no tiene ningún punto en el infinito, se concluye que:

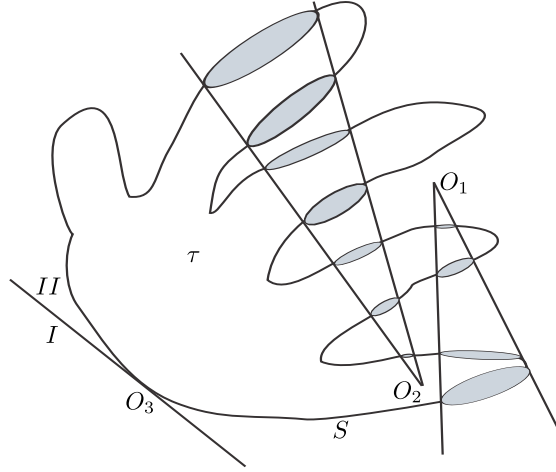


Figura 2.24 Ángulo sólido para puntos interiores y exteriores de un volumen cualquiera.

- Un cono elemental con vértice O_1 , fuera del volumen limitado por la superficie S , corta ésta un número par de veces. Los elementos de superficie cortados por el cono se ven desde O_1 según el mismo ángulo sólido, pero se cancelan en parejas. Por lo tanto, ese razonamiento se extiende a toda la superficie, de modo que $\Omega = 0$.
- Un cono elemental con vértice O_2 , dentro del volumen τ limitado por la superficie S , corta ésta un número impar de veces. Por lo tanto, desde O_2 se ve toda la superficie interior de S , y $\Omega = 4\pi$.
- Si se tiene un plano tangente a la superficie S en O_3 , éste divide el espacio en dos regiones I y II. Los ángulos sólidos según los cuales se ven las superficies S y la región I desde O_3 son iguales, por lo tanto $\Omega = 2\pi$.

El ángulo sólido es una medida según la cual una superficie abierta cubre la visión de un observador desde un punto P . Es adimensional, el ángulo sólido se llama estereorradián.

2.10. Integral de línea.

Las integrales que incluyen el desplazamiento diferencial $\vec{d\ell}$ se llaman integrales de línea. La más utilizada en el curso de Electromagnetismo es:

$$\int_C \mathbb{F} \cdot \vec{d\ell} \quad (2.51)$$

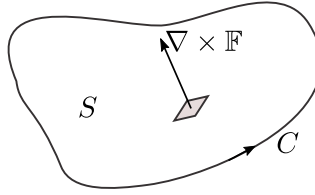


Figura 2.25 Definición del rotacional.

C : trayectoria que puede ser abierta o cerrada.

Cuando la trayectoria C es cerrada, la integral se denomina la **circulación** y se escribe así:

$$\oint_C \mathbb{F} \cdot d\vec{\ell} \quad (2.52)$$

2.11. Rotacional.

A cada punto de una superficie S limitada por una trayectoria C se asocia una cantidad vectorial llamada el rotacional y definida por:

$$\nabla \times \mathbb{F} \triangleq \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_C \mathbb{F} \cdot d\vec{\ell}}{\Delta S} \vec{a}_N \quad (2.53)$$

ΔS : superficie abierta limitada por una trayectoria cerrada simple C .

$\vec{a}_N$: vector unitario normal asociado a ΔS .

El rotacional de un campo vectorial $\mathbb{F}$ en la dirección $\vec{a}_N$, es la circulación de $\mathbb{F}$ alrededor de la periferia C que encierra un elemento de área, por unidad de ésta cuando tiende a cero.

El rotacional de $\mathbb{F}$ se define también por su componente en una dirección particular:

$$\nabla \times \mathbb{F} \cdot \vec{a}_N \triangleq \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_C \mathbb{F} \cdot d\vec{\ell}}{\Delta S} \quad (2.54)$$

ΔS contiene el punto en el cual se va a evaluar el rotacional cuando ΔS tiende a cero.

El rotacional es una medida de la magnitud de la fuente vectorial u origen de campo solenoidal, o sea, aquel cuyas líneas de campo se cierran sobre sí mismas.

2.11.1. Cálculo del rotacional en coordenadas curvilíneas ortogonales.

$$\Delta S = h_2 h_3 \Delta u_2 \Delta u_3$$

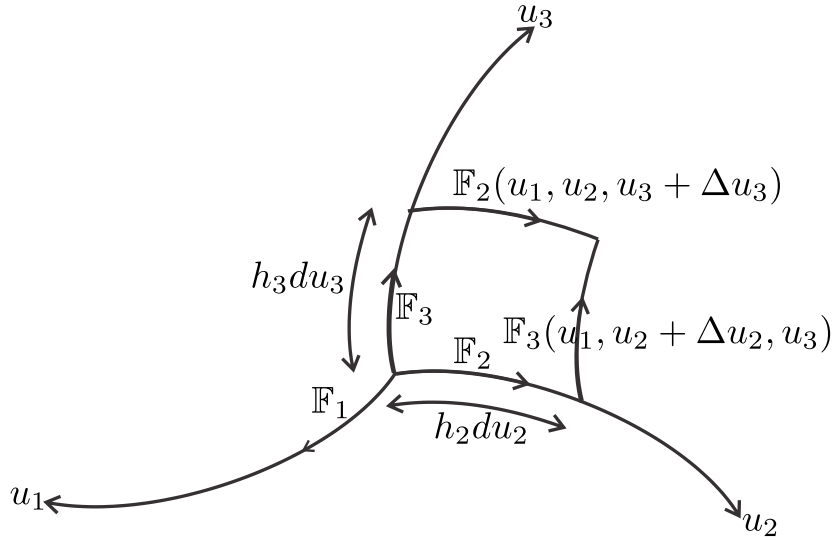


Figura 2.26 Cálculo del rotacional en coordenadas curvilíneas ortogonales

Se utiliza la definición del rotacional para hallar la componente de éste en la dirección $\vec{a}_1$:

$$\begin{aligned} \oint_c \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_1 &= F_2(u_1, u_2, u_3) h_2(u_1, u_2, u_3) \Delta u_2 + F_3(u_1, u_2 + \Delta u_2, u_3) \\ &\quad h_3(u_1, u_2 + \Delta u_2, u_3) \Delta u_3 - F_2(u_1, u_2, u_3 + \Delta u_3) h_2(u_1, u_2, u_3 + \Delta u_3) \Delta u_2 \\ &\quad - F_3(u_1, u_2, u_3) h_3(u_1, u_2, u_3) \Delta u_3 \quad (2.55) \end{aligned}$$

Pero:

$$\begin{aligned} F_2(u_1, u_2, u_3 + \Delta u_3) &\approx F_2(u_1, u_2, u_3) + \frac{\partial F_2}{\partial u_3} \Delta u_3 + \dots \\ h_2(u_1, u_2, u_3 + \Delta u_3) &\approx h_2(u_1, u_2, u_3) + \frac{\partial h_2}{\partial u_3} \Delta u_3 + \dots \end{aligned}$$

$$F_3(u_1, u_2 + \Delta u_2, u_3) \approx F_3(u_1, u_2, u_3) + \frac{\partial F_3}{\partial u_2} \Delta u_2 + \dots$$

$$h_3(u_1, u_2 + \Delta u_2, u_3) \approx h_3(u_1, u_2, u_3) + \frac{\partial h_3}{\partial u_2} \Delta u_2 + \dots$$

Al sustituir estos valores en la Ec. (2.55), se obtiene:

$$\oint_c \mathbb{F} \cdot \vec{d\ell} \approx \left[\left(h_3 \frac{\partial F_3}{\partial u_2}, F_3 \frac{\partial h_3}{\partial u_2} \right) - \left(h_2 \frac{\partial F_2}{\partial u_3} + F_2 \frac{\partial h_2}{\partial u_3} \right) \right] \Delta u_2 \Delta u_3$$

$$\oint_c \mathbb{F} \cdot \vec{d\ell} \approx \left[\frac{\partial(h_3 F_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(h_2 F_2)}{\partial u_3} \right] \frac{h_1 \Delta S}{h_1 h_2 h_3}$$

La componente del rotacional en la dirección $\vec{a}_1$ es:

$$\nabla \times \mathbb{F} \cdot \vec{a}_1 = \frac{h_1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(h_3 F_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(h_2 F_2)}{\partial u_3} \right]$$

Las componentes del rotacional en las dirección $\vec{a}_2$ y $\vec{a}_3$ son:

$$\nabla \times \mathbb{F} \cdot \vec{a}_2 = \frac{h_2}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(h_1 F_1)}{\partial u_3} - \frac{\partial(h_3 F_3)}{\partial u_1} \right]$$

$$\nabla \times \mathbb{F} \cdot \vec{a}_3 = \frac{h_3}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(h_2 F_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial(h_1 F_1)}{\partial u_2} \right]$$

Finalmente, el rotacional en notación simplificada es:

$$\nabla \times \mathbb{F} \triangleq \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{a}_1 & h_2 \vec{a}_2 & h_3 \vec{a}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix} \quad (2.56)$$

Para el caso del campo magnético o intensidad de campo magnético o excitación magnética $\mathbb{H} = \frac{\mathbb{B}}{\mu}$, siendo μ , la permeabilidad del medio.

a. $\nabla \times \mathbb{E} = 0$

El campo eléctrico independiente del tiempo, es irrotacional.

b. $\nabla \times \mathbb{E} = -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}$

Si la inducción magnética es variable con el tiempo, se produce un campo eléctrico, cuya fuente es la variación negativa de la inducción magnética con el tiempo.

c. $\nabla \times \mathbb{H} = 0$

El campo magnético donde la densidad de corriente volumétrica es cero.

d. $\nabla \times \mathbb{H} = \mathbb{J}$

El campo magnético donde la densidad de corriente volumétrica es diferente de cero.

e. $\nabla \times \mathbb{H} = \mathbb{J} + \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial t}$

El campo magnético se produce por una densidad volumétrica de corriente y/o un campo eléctrico variable en el tiempo. $\frac{\partial \mathbb{D}}{\partial t}$, recibe el nombre de densidad de corriente de desplazamiento.

2.11.2. Teorema del rotacional o de Stokes.

El teorema del rotacional o de Stokes se obtiene al ampliar el concepto del rotacional a una superficie finita. Si $\mathbb{F}$ es una función vectorial continua en una superficie S limitada por una trayectoria cerrada C ; la superficie S se divide en N subregiones pequeñas que se consideran planas con áreas $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_N$ entonces:

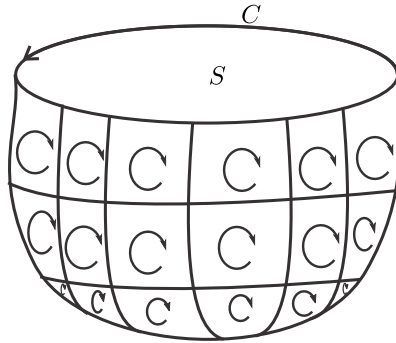


Figura 2.27 Teorema de Stokes.

$$\lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \nabla \times \mathbb{F} \cdot \Delta \vec{S}_i = \oint_C \mathbb{F} \cdot d\vec{\ell}$$

La frontera C_i de cada ΔS_i consiste en parte de la frontera C o parte de las fronteras de dos superficies adyacentes. Las integrales de línea a lo largo de curvas de tramos, adyacentes se cancelan, pues los vectores tienen direcciones opuestas y sólo queda la integral de línea a lo largo de C , así:

$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_1^N \nabla \times \mathbb{F} \cdot \Delta \vec{S}_i = \oint_c \mathbb{F} \cdot \vec{d\ell}$, por lo tanto:

$$\int_S \nabla \times \mathbb{F} \cdot d\vec{S} = \oint_c \mathbb{F} \cdot \vec{d\ell} \quad (2.57)$$

La Ec. (2.57) se denomina el teorema del rotacional o de Stokes y establece que el rotacional del campo vectorial $\mathbb{F}$ a través de una superficie S limitada por una trayectoria C es equivalente a la circulación de $\mathbb{F}$ alrededor de la curva cerrada C .

2.12. Combinación de operadores.

Operación	Nombre	Existencia
$\nabla (\nabla V)$	Gradiente del gradiente	No
$\nabla (\nabla \cdot \mathbb{F})$	Gradiente del divergente	Sí
$\nabla (\nabla \times \mathbb{F})$	Gradiente del rotacional	No
$\nabla \cdot (\nabla V)$	Divergente del gradiente	Sí
$\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbb{F})$	Divergente del divergente	No
$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbb{F})$	Divergente del rotacional	Sí
$\nabla \times (\nabla V)$	Rotacional del gradiente	Sí
$\nabla \times (\nabla \cdot \mathbb{F})$	Rotacional del divergente	No
$\nabla \times (\nabla \times \mathbb{F})$	Rotacional del rotacional	Sí

Tabla 2.2 Combinación de operadores.

1.

$$\nabla \cdot \nabla V \triangleq \nabla^2 V \quad (2.58)$$

∇^2 : Laplaciano escalar

2.

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbb{F} = 0 \quad (2.59)$$

3.

$$\nabla \times \nabla V = 0 \quad (2.60)$$

4.

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbb{F}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbb{F}) - \vec{\nabla} \nabla \cdot \mathbb{F} \quad (2.61)$$

$\vec{\nabla}$: Laplaciano vectorial

2.13. Teorema de Helmholtz.

Un campo vectorial se expresa como el gradiente negativo de una función potencial escalar más el rotacional de una función potencial vectorial, así:

$$\mathbb{F} = -\nabla V + \nabla \times \mathbb{A} \quad (2.62)$$

En la Ec. (2.62) se dan los siguientes casos:

1. Si $\nabla \times \mathbb{F} = 0$

$\mathbb{F}$ es un campo irrotacional, laminar o conservativo, se obtiene a partir del gradiente negativo de una función potencial escalar.

2. Si $\nabla \cdot \mathbb{F} = 0$

$\mathbb{F}$ es un campo solenoidal, o no divergente, se obtiene a partir del rotacional de una función potencial vectorial.

3. Si $\begin{cases} \nabla \times \mathbb{F} \neq 0 \\ \nabla \cdot \mathbb{F} \neq 0 \end{cases}$

$\mathbb{F}$ es un campo variable con el tiempo.

2.14. Clasificación general de los campos vectoriales.

CLASE I. $\nabla \times \mathbb{F} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbb{F} = 0$

Campo electrostático en una región donde no hayan cargas que lo produzcan y campo magnético en el exterior de un conductor que lleva una corriente.

CLASE II. $\nabla \times \mathbb{F} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbb{F} \neq 0$

Campo electrostático en una región donde existen cargas.

CLASE III. $\nabla \times \mathbb{F} \neq 0 \quad \nabla \cdot \mathbb{F} = 0$

Campo magnético en el interior de un conductor que transporta una corriente directa.

CLASE IV. $\nabla \times \mathbb{F} \neq 0 \quad \nabla \cdot \mathbb{F} \neq 0$

Campos eléctrico y magnético variables en el tiempo.

2.15. Teoremas de Green.

Considérense dos funciones escalares V y W en un volumen τ limitado por una superficie cerrada S , si $\mathbb{G}_1 = V\nabla W$, hallar su flujo neto.

2.15.1. Primer teorema de Green.

Se utiliza la siguiente identidad vectorial: $\nabla \cdot V\mathbb{F} = \nabla V \cdot \mathbb{F} + V\nabla \cdot \mathbb{F}$

$$\nabla \cdot \mathbb{G}_1 = \nabla \cdot (V\nabla W) = \nabla V \cdot \nabla W + V\nabla \cdot \nabla W$$

$$\nabla \cdot (V\nabla W) = \nabla V \cdot \nabla W + V \nabla^2 W$$

$$\int_{\tau} \nabla \cdot (V\nabla W) d\tau = \int_{\tau} \nabla V \cdot \nabla W d\tau + \int_{\tau} V \nabla^2 W d\tau$$

$$\oint_S V\nabla W \cdot d\mathbb{S} = \int_{\tau} \nabla V \cdot \nabla W d\tau + \int_{\tau} V \nabla^2 W d\tau \quad (2.63)$$

La Ec. (2.63) se denomina Primer Teorema de Green y se utiliza para deducir el Teorema de la Unicidad o Teorema de la Solución Única.

2.15.2. Segundo teorema de Green.

Si $\mathbb{G}_2 = W\nabla V$, hallar su flujo neto.

$$\nabla \cdot \mathbb{G}_2 = \nabla \cdot (W\nabla V) = \nabla W \cdot \nabla V + W\nabla \cdot \nabla V$$

$$\nabla \cdot (W\nabla V) = \nabla W \cdot \nabla V + W \nabla^2 V$$

$$\mathbb{G}_1 - \mathbb{G}_2 = V\nabla W - W\nabla V = V \nabla^2 W - W \nabla^2 V$$

$$\begin{aligned} \int_{\tau} \nabla \cdot (\mathbb{G}_1 - \mathbb{G}_2) d\tau &= \int_{\tau} \nabla \cdot (V \nabla W - W \nabla V) d\tau = \int_{\tau} \nabla \cdot (V \nabla^2 W - W \nabla^2 V) d\tau \\ \oint_S (V \nabla W - W \nabla V) \cdot d\mathbb{S} &= \int_{\tau} \nabla \cdot (V \nabla^2 W - W \nabla^2 V) d\tau \end{aligned} \quad (2.64)$$

La Ec. (2.64) se denomina Segundo Teorema de Green y se utiliza para establecer una solución a la ecuación de Laplace.

2.16. Solución de la ecuación de Laplace en una dimensión.

En este caso el potencial varía con una coordenada en el volumen τ limitado por la superficie S y en él no existe carga libre.

2.16.1. Coordenadas cartesianas.

$$\begin{aligned} \text{I} \quad \frac{d^2 V}{dz^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dV}{dz} = A_1 \\ V = A_1 z + A_2 \end{aligned} \quad (2.65)$$

De otra parte, el campo electrostático se obtiene a partir del gradiente negativo de la función potencial escalar denominada el potencial electrostático.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} = -\nabla V \quad \rightarrow \quad \mathbb{E} = -\frac{dV}{dz} \vec{a}_z \\ \mathbb{E} = -A_1 \vec{a}_z \end{aligned} \quad (2.66)$$

De modo similar se obtiene la solución para las coordenadas y y z .

2.16.2. Coordenadas cilíndricas.

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad r \frac{dV}{dr} = A_2 \\ V = A_2 \ln r + A_3 \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E} = -\nabla V \quad \rightarrow \quad \mathbb{E} &= -\frac{dV}{dr}\vec{a}_r \\ \mathbb{E} &= -\frac{A_2}{r}\vec{a}_r\end{aligned}\tag{2.68}$$

$$\begin{aligned}\text{II.} \quad \frac{1}{r^2}\frac{d^2V}{d\varphi^2} &= 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dV}{d\varphi} = A_3 \\ V &= A_3\varphi + A_4\end{aligned}\tag{2.69}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E} = -\nabla V \quad \rightarrow \quad \mathbb{E} &= -\frac{1}{r}\frac{dV}{d\varphi}\vec{a}_\varphi \\ \mathbb{E} &= -\frac{A_3}{r}\vec{a}_\varphi\end{aligned}\tag{2.70}$$

$$\begin{aligned}\text{III.} \quad \frac{d^2V}{dz^2} &= 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dV}{dz} = A_5 \\ V &= A_5z + A_6\end{aligned}\tag{2.71}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E} = -\nabla V \quad \rightarrow \quad \mathbb{E} &= -\frac{dV}{dz}\vec{a}_z \\ \mathbb{E} &= -A_5\vec{a}_z\end{aligned}\tag{2.72}$$

2.16.3. Coordenadas esféricas.

$$\begin{aligned}\text{I.} \quad \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right) &= 0 \quad \rightarrow \quad r^2\frac{dV}{dr} = A_6 \\ V &= -\frac{A_6}{r} + A_7\end{aligned}\tag{2.73}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E} = -\nabla V \quad \rightarrow \quad \mathbb{E} &= -\frac{dV}{dr}\vec{a}_r \\ \mathbb{E} &= -\frac{A_6}{r^2}\vec{a}_r\end{aligned}\tag{2.74}$$

$$\text{II.} \quad \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dV}{d\theta}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \sin\theta\frac{dV}{d\theta} = A_8$$

$$V = A_8 \ln (\csc \theta - \cot \theta) + A_9$$

$$V = A_8 \ln \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) + A_9 \quad (2.75)$$

$$\mathbb{E} = -\nabla V \quad \rightarrow \quad \mathbb{E} = -\frac{1}{r} \frac{dV}{d\theta} \vec{a}_\theta$$

$$\mathbb{E} = -\frac{A_8}{r \sin \theta} \vec{a}_\theta \quad (2.76)$$

$$\text{III.} \quad \frac{d^2 V}{d\varphi^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dV}{d\varphi} = A_{10}$$

$$V = A_{10} \varphi + A_{11} \quad (2.77)$$

$$\mathbb{E} = -\nabla V \quad \rightarrow \quad \mathbb{E} = -\frac{1}{r} \frac{dV}{d\varphi} \vec{a}_\varphi$$

$$\mathbb{E} = -\frac{A_{10}}{r} \vec{a}_\varphi \quad (2.78)$$

En los sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas los ángulos θ y φ se deben expresar en radianes. La evaluación de las constantes será aplicación de esta unidad y la siguiente.

2.17. Solución de la ecuación de Laplace en dos dimensiones. ¹

El método que se va a utilizar es el de separación de variables, que consiste en suponer que el potencial eléctrico es el producto de dos funciones, donde cada una es independiente de la otra.

2.17.1. Coordenadas cartesianas.

La ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas en dos dimensiones es:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (2.79)$$

$$V = F(x)G(y) \quad (2.80)$$

Se utilizará la siguiente nomenclatura:

$$F = F(x) \quad G = G(y) \quad \rightarrow \quad V = FG \quad (2.81)$$

De la Ec. (2.80), se obtiene:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = G \frac{dF}{dx} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = G \frac{d^2 F}{dx^2} \quad (2.82)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = F \frac{dG}{dy} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = F \frac{d^2 G}{dy^2} \quad (2.83)$$

Si se sustituyen los valores correspondientes de las Ecs. (2.82) y (2.83) en la Ec. (2.79), se obtiene:

$$G \frac{d^2 F}{dx^2} + F \frac{d^2 G}{dy^2} = 0 \quad (2.84)$$

Si la Ec. (2.84) se divide por FG :

$$\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{dx^2} + \frac{1}{G} \frac{d^2 G}{dy^2} = 0 \quad (2.85)$$

En la Ec. (2.85), el primer término no involucra la variable y , y el segundo la x . Por lo tanto, la Ec. (2.85) se cumple si ambos términos son constantes:

$$\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{dx^2} = a^2 \quad \frac{1}{G} \frac{d^2 G}{dy^2} = b^2 \quad \rightarrow \quad a^2 + b^2 = 0 \quad (2.86)$$

así:

$$F = A_1 e^{ax} + A_2 e^{-ax} \quad (2.87)$$

$$G = A_3 e^{iay} + A_4 e^{-iay} \quad (2.88)$$

Entonces, la solución a la ecuación de Laplace es:

$$V = (A_1 e^{ax} + A_2 e^{-ax}) (A_3 e^{iay} + A_4 e^{-iay}) \quad (2.89)$$

Se sabe que:

$$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta \quad (2.90)$$

$$e^{\pm k\theta} = \cosh k\theta \pm \sinh k\theta \quad (2.91)$$

Si se sustituyen los valores correspondientes de las Ecs. (2.90) y (2.91) en la Ec. (2.89), se tiene:

$$F = (A_1 + A_2) \cosh ax + (A_1 - A_2) \sinh ax$$

$$A = A_1 + A_2 \text{ y } B = A_1 - A_2$$

$$F = A \cosh ax + B \sinh ax$$

$$G = (A_3 + A_4) \cos ay (A_3 - A_4) \sin ay$$

$$C = A_3 + A_4 \text{ y } D = i(A_3 - A_4)$$

$$G = C \cos ay + D \sin ay$$

Por lo tanto, otras soluciones equivalentes serán:

$$V = (A_1 e^{ax} + A_2 e^{-ax}) (C \cos ay + D \sin ay) \quad (2.92)$$

$$V = (A \cosh ax + B \sinh ax) (A_3 e^{iay} + A_4 e^{-iay}) \quad (2.93)$$

$$V = (A \cosh ax + B \sinh ax) (C \cos ay + D \sin ay) \quad (2.94)$$

2.17.2. Coordenadas Cilíndricas.

La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas en dos dimensiones es:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (2.95)$$

Se utilizará la siguiente nomenclatura:

$$F = F(r) \quad G = G(\varphi) \quad \rightarrow \quad V = FG \quad (2.96)$$

De la Ec. (2.96):

$$\frac{\partial V}{\partial r} = G \frac{dF}{dr} \quad (2.97)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = F \frac{dG}{d\varphi} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = F \frac{d^2 G}{d\varphi^2} \quad (2.98)$$

Si se sustituyen los valores correspondientes de las Ecs. (2.97) y (2.98) en la Ec. (2.95), se tiene:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r G \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{F}{r^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$\frac{G}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{F}{r^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (2.99)$$

Si la Ec. (2.99) se multiplica por $\frac{r^2}{FG}$, se llega a:

$$\frac{r}{F} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dF}{dr} \right) + \frac{1}{G} \frac{d^2 G}{d\varphi^2} = 0 \quad (2.100)$$

La Ec. (2.100) se satisface si ambos términos son constantes.

$$\frac{1}{G} \frac{d^2 G}{d\varphi^2} = -n^2 \quad (2.101)$$

La solución a la Ec. (2.101) es:

$$G = \sum_1^{\infty} \left(H_n e^{in\varphi} + K_n e^{-in\varphi} \right) \quad (2.102)$$

Si $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, se verifica que $G(0) = G(2\pi)$.

n debe ser entero. La solución para la variable r se obtiene así:

$$\frac{r}{F} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dF}{dr} \right) - n^2 = 0 \quad (2.103)$$

La Ec. (2.103) es una forma de la ecuación diferencial de Bessel, cuya solución es:

$$F = r^\alpha \quad (2.104)$$

A continuación se demuestra que Ec. (2.104) es una solución a la Ec. (2.103):

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dr} &= \alpha r^{\alpha-1} & \rightarrow & \quad r \frac{dF}{dr} = \alpha r^\alpha \\ \frac{d}{dr} \left(r \frac{dF}{dr} \right) &= \alpha^2 r^{\alpha-1} & \rightarrow & \quad r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dF}{dr} \right) = \alpha^2 r^\alpha = \alpha^2 F \end{aligned}$$

Si se sustituye el valor anterior en la Ec. (2.103), se obtiene:

$$\frac{\alpha^2 F}{F} - n^2 = 0 \quad \alpha^2 - n^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = \pm n$$

La Ec. (2.104) es una solución a la Ec. (2.103) si $\alpha = \pm n$. Así:

$$F = \sum_1^\infty (C_n r^n + D_n r^{-n}) \quad (2.105)$$

La solución a la ecuación de Laplace es:

$$V = \sum_1^\infty (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) (C_n r^n + D_n r^{-n}) \quad (2.106)$$

La solución que se utilizará en los cursos de Electromagnetismo, se obtiene al hacer $n = -1$:

$$V = \sum_1^\infty \left(Ar + \frac{B}{r} \right) (C \cos \varphi + D \sin \varphi) \quad (2.107)$$

Si $n = 0$, en la Ec. (2.106), $V = V(r)$ y la solución será la correspondiente para variación radial en una dimensión.

2.17.3. Coordenadas esféricas.

La ecuación de Laplace en coordenadas esféricas en dos dimensiones es:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (2.108)$$

Se utilizará la siguiente nomenclatura:

$$F = F(r) \quad G = G(\theta) \quad \therefore \quad V = FG \quad (2.109)$$

De la Ec. (2.109):

$$\frac{\partial V}{\partial r} = G \frac{dF}{dr} \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = F \frac{dG}{d\theta} \quad (2.110)$$

Si se sustituyen los valores correspondientes de la Ecs. (2.110) en la Ec. (2.108), se tiene:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 G \frac{dF}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(F \sin \theta \frac{dG}{d\theta} \right) = 0 \quad (2.111)$$

Si la Ec. (2.111) se multiplica por $\frac{r^2}{FG}$, se llega a:

$$\frac{1}{F} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dF}{dr} \right) + \frac{1}{G \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(F \sin \theta \frac{dG}{d\theta} \right) = 0 \quad (2.112)$$

La Ec. (2.112) se satisface si ambos términos son constantes.

$$\frac{1}{F} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dF}{dr} \right) - m(m+1) = 0 \quad (2.113)$$

La solución a la Ec. (2.113) es:

$$F = A_1 r^m + A_2 r^{-(m+1)} \quad (2.114)$$

A continuación se demuestra que la Ec. (2.114) es una solución de la Ec. (2.113):

$$\frac{dF}{dr} = mA_1 r^{m-1} + [-(m+1)] A_2 r^{-(m-2)}$$

$$r^2 \frac{dF}{dr} = mA_1 r^{m+1} - (m+1) A_2 r^{-m}$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dF}{dr} \right) = m(m+1)A_1 r^m + m(m+1)A_2 r^{-(m+1)}$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dF}{dr} \right) = m(m+1)F \quad (2.115)$$

Si se sustituye la Ec. (2.115) en la Ec. (2.113), se obtiene $\frac{1}{F}m(m+1)F - m(m+1) = 0$. De otra parte:

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dG}{d\theta} \right) + m(m+1)G = 0 \quad (2.116)$$

La Ec. (2.116) se denomina la ecuación de Legendre. La forma normal de ésta se obtiene al remplazar:

$$u = \cos\theta \quad \frac{du}{d\theta} = -\sin\theta \quad \frac{d}{d\theta} = \frac{du}{d\theta} \frac{d}{du}$$

$$\frac{d}{d\theta} = -\sin\theta \frac{d}{du} \quad 1 - u^2 = \sin^2\theta$$

$$\frac{1}{\sin\theta} (-\sin\theta) \frac{d}{du} \left[\sin\theta (-\sin\theta) \frac{dG}{du} \right] + m(m+1)G = 0$$

$$-\frac{d}{du} \left[-\sin^2\theta \frac{dG}{du} \right] + m(m+1)G = 0$$

$$\frac{d}{du} \left[(1 - u^2) \frac{dG}{du} \right] + m(m+1)G = 0 \quad (2.117)$$

La Ec. (2.117) se llama la ecuación normal de Legendre, cuya solución es:

$$G(u) = P_m^0(u) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{du^m} (u^2 - 1)^m \quad (2.118)$$

La Ec. (2.118) se denomina la ecuación de Rodrigues y es la función generadora de polinomios de primera clase y grado m. Entonces:

$$V = \sum_{\infty}^0 \left[A_m r^m + B_m r^{-(m+1)} \right] P_m^0(\cos\theta) \quad (2.119)$$

La Ec. (2.119) es una forma particular de representar la solución de la ecuación de Laplace. La solución que se utilizará en los cursos de Electromagnetismo, se obtiene al hacer $m = 1$:

$$V = \left(Ar + \frac{B}{r^2} \right) P_1^0(\cos\theta) \quad P_1^0(\cos\theta) = \cos\theta$$

$$V = \left(Ar + \frac{B}{r^2} \right) \cos\theta \quad (2.120)$$

La Ec. (2.120) es la que se usará en el curso de Electromagnetismo I.

$$(m+1)P_{m+1}(u) = (2m+1)uP_m(u) - mP_{m-1}(u) \quad (2.121)$$

$$\frac{u^2-1}{m} \frac{dP_m(u)}{du} = uP_m(u) - P_{m-1}(u) \quad (2.122)$$

$$(2m+1)P_m(u) = \frac{d}{du} [P_{m+1}(u) - P_{m-1}(u)] \quad (2.123)$$

Las Ecs. (2.121), (2.122) y (2.123) sirven para calcular un polinomio en particular. Se conocen con el nombre de Fórmulas de Recurrencia.

2.18. Ejemplos.

Ejemplo 6.

Se tiene un campo $\mathbb{A} = \frac{100}{r^2} \vec{a}_r$. Encontrar la magnitud del campo en $(-3, 4, 10)$ y determinar el ángulo que forma con el vector $\mathbb{D} = 2\vec{a}_x - 2\vec{a}_y + \vec{a}_z$ si el campo está expresado en coordenadas:

- esféricas
- cilíndricas

Solución.

- En coordenadas esféricas.

$$\vec{r} = x\vec{a}_x + y\vec{a}_y + z\vec{a}_z \quad \rightarrow \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$x = -3 \quad y = 4 \quad z = 10 \quad r = 5\sqrt{5}$$

$$\vec{a}_r = \frac{\vec{r}}{r} \quad \vec{a}_r = \frac{-3\vec{a}_x + 4\vec{a}_y + 10\vec{a}_z}{5\sqrt{5}}$$

$$\text{Así: } \mathbb{A} = \frac{100}{(5\sqrt{5})^2} \vec{a}_r = \frac{4}{5} \vec{a}_r$$

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{D} = \frac{4}{5} \frac{-3\vec{a}_x + 4\vec{a}_y + 10\vec{a}_z}{\sqrt{5}} \cdot (2\vec{a}_x - 2\vec{a}_y + \vec{a}_z) = -\frac{16}{25\sqrt{5}}$$

De la definición del producto punto:

$$\alpha = \arccos \left[\frac{\mathbb{A} \cdot \mathbb{D}}{(\mathbb{A})(\mathbb{D})} \right] = \arccos \left[-\frac{16}{25\sqrt{5}(0,8)(3)} \right] = 96,85^\circ$$

□

- En coordenadas cilíndricas.

$$\vec{r} = x\vec{a}_x + y\vec{a}_y \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{Para } x = -3 \quad y = 4 \quad r = 5$$

$$\vec{a}_r = \frac{\vec{r}}{r} \quad \vec{a}_r = \frac{-3\vec{a}_x + 4\vec{a}_y}{5}$$

$$\text{Así: } \mathbb{A} = \frac{100}{25} \vec{a}_r = 4\vec{a}_r$$

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{D} = 4 \frac{-3\vec{a}_x + 4\vec{a}_y}{5} \cdot (2\vec{a}_x - 2\vec{a}_y + \vec{a}_z) = -\frac{56}{5}$$

De la definición del producto punto:

$$\alpha = \arccos \left[\frac{\mathbb{A} \cdot \mathbb{D}}{(A)(D)} \right] = \arccos \left[-\frac{56}{(5)(4)(3)} \right] = 158,96^\circ \quad \square$$

Ejemplo 7.

$\mathbb{B} = \vec{a}_x + 2\vec{a}_y + 3\vec{a}_z$, $\mathbb{A}$ tiene magnitud $\sqrt{3}$ y $A_x = 1$, determinar $\mathbb{A}$ de modo que $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ sean ortogonales.

Solución.

$$\mathbb{A} = A_x \vec{a}_x + A_y \vec{a}_y + A_z \vec{a}_z = \vec{a}_x + A_y \vec{a}_y + A_z \vec{a}_z$$

$$\sqrt{1 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{3} \quad \mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = (\vec{a}_x + 2\vec{a}_y + 3\vec{a}_z) \cdot (A_x \vec{a}_x + A_y \vec{a}_y + A_z \vec{a}_z)$$

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = 1 + 2A_y + 3A_z = 0$$

$$\text{Al solucionar las ecuaciones } \begin{cases} 1 + A_y^2 + A_z^2 = 3 \\ 1 + 2A_y + 3A_z = 0 \end{cases} :$$

$$A_y = -\frac{1 + 3A_z}{2} \rightarrow 1 + \frac{1 + 6A_z + 9A_z^2}{4} + A_z^2 = 3$$

$$13A_z^2 + 6A_z - 7 = 0 \rightarrow A_z = \frac{-6 + \sqrt{400}}{26}$$

$$A_z = \frac{7}{13} \rightarrow A_y = -\frac{17}{13}$$

$$A_z = -1 \rightarrow A_y = 1$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{A} = \vec{a}_x + \vec{a}_y - \vec{a}_z \quad \mathbb{A} = \vec{a}_x - \frac{17}{13}\vec{a}_y + \frac{7}{13}\vec{a}_z \quad \square$$

Ejemplo 8.

Hallar la ecuación de la recta L_1 que pasa por $(1, 3)$, en el plano $z = 0$ y es perpendicular a la recta L_2 $x - 2y + 2 = 0$. Elaborar un programa en Matlab que muestre la intersección de las rectas.

Solución.

$$W_2 = x - 2y + 2 = 0, \text{ por lo tanto } \nabla W_2 = \vec{a}_x - 2\vec{a}_y$$

La recta L_1 tiene la forma $ax + by + c = 0$. Un vector normal a ésta es $\nabla W_1 = a\vec{a}_x + b\vec{a}_y$. Si las rectas L_1 y L_2 son ortogonales, el ángulo entre ellas es de $\frac{\pi}{2}$,

entonces:

$$\nabla W_1 \cdot \nabla W_2 = (a\vec{a}_x + b\vec{a}_y) \cdot (\vec{a}_x - 2\vec{a}_y)$$

$$a - 2b = 0 \quad \rightarrow \quad a = 2b$$

Si se reemplaza este valor en la ecuación de L_1 :

$$2bx + by + c = 0 \quad \rightarrow \quad 2x + y + k = 0$$

donde $k = \frac{c}{b}$

Si la recta pasa por el punto $(1, 3)$

$$2(1) + 3 + k = 0 \quad \rightarrow \quad k = -5$$

La ecuación de la recta solicitada es:

$$2x + y - 5 = 0$$

□

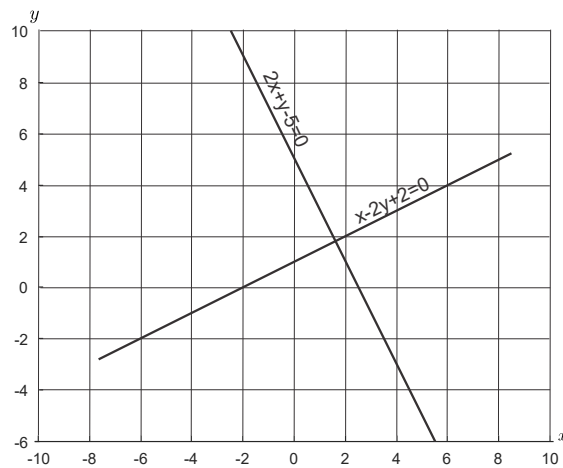


Figura 2.28 Rectas perpendiculares.

El programa en Matlab es:

```
x=-6:0.001:6;axis([-6 6 -6 10]);
```

```
hold on
```

```
grid on
```

```
y1=(x+2)/2;y2=-2*x+5;
```

```
plot (x,y1)
```

```
axis equal
```

hold on

plot (x,y2)

Al correr el programa en Matlab se despliega en la pantalla del pc la Fig. 2.28

Ejemplo 9.

a. Hallar la derivada direccional de $W = x^2 + y^2 + z^2$ en la dirección de P (1, 1, 0) a Q (2, 1, 1)

b. su valor máximo y dirección en (1, 1, 0)

Solución.

$$\nabla W = 2x\vec{a}_x + 2y\vec{a}_y + 2z\vec{a}_z$$

$$\nabla W|_{(1,1,0)} = 2x\vec{a}_x + 2y\vec{a}_y \longrightarrow \vec{a}_l = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\overline{PQ}} = \frac{(2-1)\vec{a}_x + (1-1)\vec{a}_y + (1-0)\vec{a}_z}{\overline{PQ}}$$

$$\vec{a}_l = \frac{\vec{a}_x + \vec{a}_y}{\sqrt{2}}$$

Se sabe que

$$\frac{dW}{d\ell} = \nabla W \cdot \vec{a}_l = \sqrt{2} \quad \square$$

$$\left. \frac{dW}{d\ell} \right|_{Máx} = \nabla W = \sqrt{2} \quad \square$$

La dirección de máxima variación coincide con la del gradiente.

Ejemplo 10.

Hallar un vector unitario perpendicular al plano $4x + 2y + 4z = -7$. ¿Cuál es la distancia de este plano al origen de coordenadas?

Solución.

$$W = 4x + 2y + 4z + 7 = 0$$

$$\nabla W = 4\vec{a}_x + 2\vec{a}_y + 4\vec{a}_z \longrightarrow \nabla W = \pm 6$$

$$\vec{a}_N = \frac{\nabla W}{\overline{\nabla W}} = \frac{4\vec{a}_x + 2\vec{a}_y + 4\vec{a}_z}{\pm 6} = \pm \frac{2\vec{a}_x + \vec{a}_y + 2\vec{a}_z}{3}$$

$(-1, \frac{1}{2}, -1)$ es un punto del plano. Así: $\vec{r} = -\vec{a}_x + \frac{1}{2}\vec{a}_y - \vec{a}_z$

$$|d| = |\vec{r} \cdot \vec{a}_N| = \left| -\frac{7}{6} \right| = 1,167 \quad \square$$

Ejemplo 11.

Clasificar el campo vectorial $\mathbb{E} = y\vec{a}_x + (z\cos yz + x)\vec{a}_y + y\cos yz\vec{a}_z$ y hallar la respectiva función potencial escalar o vectorial a partir de la cual se obtiene $\mathbb{E}$.

Solución.

De acuerdo al Teorema de Helmholtz, el campo se clasifica al hallar su divergente y su rotacional.

$$\nabla \times \mathbb{E} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z\cos yz + x & y\cos yz \end{vmatrix} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbb{E} = -z^2 \sin yz - y^2 \sin yz$$

$\nabla \times \mathbb{E} = 0$ y $\nabla \cdot \mathbb{E} \neq 0$: corresponde a un Campo Clase II.

Se trata de un campo laminar, por lo tanto, se obtiene a partir del gradiente negativo de una función potencial escalar.

$$dV = -\mathbb{E} \cdot d\vec{l} = -[ydx + (z\cos yz + x)dy + y\cos yzdz]$$

$$dV = -[ydx + (z\cos yz + x)dy + y\cos yzdz]$$

$$dV = -[d(xy) + d(\sin yz)]$$

$$V = -xy - \sin yz + k \quad \square$$

Ejemplo 12.

Clasificar el campo vectorial $\mathbb{B} = xz\vec{a}_x - yz\vec{a}_y + y\vec{a}_z$ y hallar la respectiva función potencial escalar o vectorial a partir de la cual se obtiene $\mathbb{B}$.

Solución.

De acuerdo al Teorema de Helmholtz, el campo se clasifica al hallar su divergente y su rotacional.

$$\nabla \times \mathbb{B} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & -yz & y \end{vmatrix} = (1+y)\vec{a}_x + x\vec{a}_y$$

$$\nabla \cdot \mathbb{B} = z - z = 0$$

$\nabla \times \mathbb{B} \neq 0$ y $\nabla \cdot \mathbb{B} = 0$ corresponde a un Campo Clase III.

Se trata de un campo no divergente o solenoidal, por lo tanto, se obtiene a partir del rotacional de una función potencial vectorial.

$$\mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{A} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = xz\vec{a}_x - yz\vec{a}_y + y\vec{a}_z$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = xz \quad (2.124)$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = -yz \quad (2.125)$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = y \quad (2.126)$$

Se supone una de las componentes, por ejemplo $A_x = xyz$, por lo tanto:

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} = xz \quad (2.127)$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} = xy \quad (2.128)$$

La Ec. (2.128) se reemplaza en la La Ec. (2.125):

$$\frac{\partial A_z}{\partial x} = xy + yz$$

$$A_z = \frac{1}{2}x^2y + xyz + f(y, z) \quad (2.129)$$

Se reemplaza el valor de la Ec. (2.127) en la Ec. (2.126):

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} = y + xz$$

$$A_y = xy + \frac{1}{2}x^2z + xyz + g(y, z) \quad (2.130)$$

De las Ecs. (2.129) y (2.130), se obtienen las respectivas derivadas solicitadas en la Ec. (2.124):

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{1}{2}x^2 + xz + \frac{\partial f}{\partial y} \quad (2.131)$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{\partial g}{\partial z} \quad (2.132)$$

De la Ec. (2.131) se resta la Ec. (2.132) y este valor se reemplaza en la Ec. (2.124):

$$xz = xz + \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z} \quad (2.133)$$

Se supone la función $f(y, z)$:

$$f(y, z) = y^2 + z^2 \quad (2.134)$$

Si la Ec. (2.134) se reemplaza en la Ec. (2.129) se obtiene la solución para la componente z de la función potencial vectorial:

$$A_z = \frac{1}{2}x^2y + xyz + y^2 + z^2$$

De la Ec. (2.133) se obtiene la función $g(y, z)$:

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$g = 2yz \quad (2.135)$$

Si la Ec. (2.135) se reemplaza en la Ec. (2.130) se obtiene la solución para A_y :

$$A_y = xy + \frac{1}{2}x^2z + 2yz$$

por lo tanto:

$$\mathbb{A} = xyz\vec{a}_x + \left(xy + \frac{1}{2}x^2z + 2yz\right)\vec{a}_y + \left(\frac{1}{2}x^2y + xyz + y^2 + z^2\right)\vec{a}_z \quad \square$$

Verificación

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_z}{\partial y} &= \frac{1}{2}x^2 + xz + 2y & \frac{\partial A_y}{\partial z} &= \frac{1}{2}x^2 + 2y & \longrightarrow & \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = xz \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} &= xy & \frac{\partial A_z}{\partial x} &= xy + yz & \longrightarrow & \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = -yz \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} &= y + xz & \frac{\partial A_x}{\partial y} &= xz & \longrightarrow & \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = y \end{aligned}$$

Ejemplo 13.

El campo eléctrico producido por una esfera de radio a , que tiene una densidad de carga volumétrica ρ , está dado por:

$$E_r = \begin{cases} \frac{2\rho r^{\frac{3}{2}}}{7\epsilon_o} & r \leq a \\ \frac{2\rho a^{\frac{7}{2}}}{7\epsilon_o r^2} & r \geq a \end{cases}$$

Clasificar los campos en el interior y exterior de la esfera. Interpretar los resultados.

Solución.

$$\text{a. } \mathbb{E} = \frac{2\rho r^{\frac{3}{2}}}{7\epsilon_o}\vec{a}_r \quad \longrightarrow \quad \nabla \times \mathbb{E} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \vec{a}_r & r\vec{a}_\theta & r\sin\theta\vec{a}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{2\rho a^{\frac{3}{2}}}{7\epsilon_o} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbb{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta E_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\nabla \cdot \mathbb{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(\frac{2\rho r^{\frac{3}{2}}}{7\epsilon_o} \right) \right] = \frac{\rho r^{\frac{1}{2}}}{\epsilon_o}$$

$$\nabla \times \mathbb{E} = 0 \text{ y } \nabla \cdot \mathbb{E} \neq 0$$

El campo en el interior de la esfera pertenece a la Clase II. En este volumen existe una distribución de carga eléctrica y no hay fuentes de campo magnético. $\square$

$$\text{b. } \mathbb{E} = \frac{2\rho a^{\frac{7}{2}}}{7\epsilon_o r^2} \vec{a}_r \longrightarrow \nabla \times \mathbb{E} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \vec{a}_r & r\vec{a}_\theta & r\sin\theta\vec{a}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{2\rho a^{\frac{7}{2}}}{7\epsilon_o r^2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbb{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(\frac{2\rho a^{\frac{7}{2}}}{7\epsilon_o r^2} \right) \right] = 0$$

$$\nabla \times \mathbb{E} = 0 \text{ y } \nabla \cdot \mathbb{E} = 0$$

El campo eléctrico fuera de la esfera pertenece a la Clase I, no existe una distribución de carga eléctrica ni fuentes de campo magnético. $\square$

Ejemplo 14.

La intensidad del campo magnético en un cable coaxial para cada región indicada en la Fig. 2.29 se da a continuación.

$$H_\varphi = \begin{cases} \frac{Ir}{2\pi a^2} & r \leq a \\ \frac{I}{2\pi r} & a \leq r \leq b \\ \frac{I(c^2 - r^2)}{2\pi r(c^2 - b^2)} & b \leq r \leq c \end{cases}$$

Clasificar los campos en cada región del cable coaxial. Interpretar los resultados.

Solución.

Para clasificar los campos en cada región del cable coaxial, se utiliza el teorema de Helmholtz.

$$\text{a. } \mathbb{H} = \frac{Ir}{2\pi a^2} \vec{a}_\varphi \quad r \leq a$$

$$\nabla \cdot \mathbb{H} = \frac{1}{r} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{Ir}{2\pi a^2} \right] = 0$$

$$\nabla \times \mathbb{H} = \begin{vmatrix} \vec{a}_r & r\vec{a}_\varphi & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & r \left(\frac{Ir}{2\pi a^2} \right) & 0 \end{vmatrix} = \frac{I}{\pi a^2} \vec{a}_z = \mathbb{J}$$

$$\nabla \times \mathbb{H} = \mathbb{J} \text{ y } \nabla \cdot \mathbb{H} = 0$$

El campo en el interior del cable coaxial corresponde a la clase III. En esta región no existe distribución de carga eléctrica y hay una fuente que da lugar a un campo magnético. La fuente vectorial de este campo es $\mathbb{J} = \frac{I}{\pi a^2} \vec{a}_z$ y la magnitud de ésta, se obtiene al obtener el flujo de la densidad de corriente a través de la sección transversal del cable central, denominado “alma”.

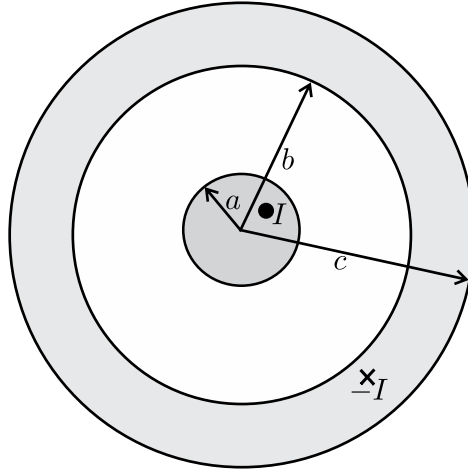


Figura 2.29 Vista frontal de un cable coaxial.

$$i = \int_S \mathbb{J} \cdot d\mathbb{S} = \int_S \frac{I}{\pi a^2} dS = \frac{I}{\pi a^2} (\pi a^2) = I$$

□

$$\text{b. } \mathbb{H} = \frac{I}{2\pi r} \vec{a}_\varphi \quad a \leq r \leq b$$

$$\nabla \cdot \mathbb{H} = \frac{1}{r} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{I}{2\pi r} \right] = 0$$

$$\nabla \times \mathbb{H} = \begin{vmatrix} \vec{a}_r & r\vec{a}_\varphi & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & r\left(\frac{I}{2\pi r}\right) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\nabla \times \mathbb{H} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbb{H} = 0$$

El campo en la región $a \leq r \leq b$ del cable coaxial pertenece a la Clase I. En ésta no existe ninguna distribución de carga eléctrica ni fuente que dé lugar a un campo magnético. $\square$

$$c. \quad \mathbb{H} = \frac{I(c^2 - r^2)}{2\pi r(c^2 - b^2)} \quad b \leq r \leq c$$

$$\nabla \cdot \mathbb{H} = \frac{1}{r} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{I(c^2 - r^2)}{2\pi r(c^2 - b^2)} \right] = 0$$

$$\nabla \times \mathbb{H} = \begin{vmatrix} \vec{a}_r & r\vec{a}_\varphi & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{Ir(c^2 - r^2)}{2\pi r(c^2 - b^2)} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{I}{\pi(c^2 - b^2)} \vec{a}_z = -\mathbb{J}$$

$$\nabla \times \mathbb{H} \neq 0 \quad \nabla \cdot \mathbb{H} = 0$$

El campo en la región $b \leq r \leq c$ del cable coaxial pertenece a la Clase III. En ésta no existe ninguna distribución de carga eléctrica y existe una fuente que da lugar a un campo magnético. La fuente vectorial de este campo es $\mathbb{J} = -\frac{I}{\pi(c^2 - b^2)} \vec{a}_z$ y la magnitud se obtiene al hallar el flujo de la densidad de corriente a través de la sección transversal del cable entre b y c . El signo negativo corresponde a que la corriente circula en sentido contrario a la del conductor central.

$$i = \int_S \mathbb{J} \cdot d\vec{S} = \int_S -\frac{I}{\pi(c^2 - b^2)} \vec{a}_z \cdot d\vec{S} = -\frac{I}{\pi(c^2 - b^2)} \pi(c^2 - b^2) = -I \quad \square$$

Ejemplo 15.

Hallar el vector área total para la superficie que limita al volumen que se encuentra en el primer octante, como se muestra en la Fig. 2.30.

Solución.

Para hallar el vector área total, se consideran las cuatro superficies que limitan al volumen.

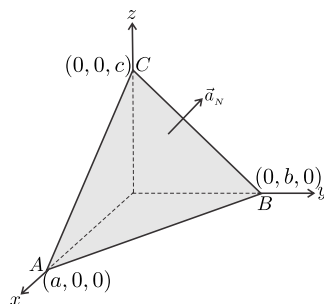


Figura 2.30 Área total de una superficie cerrada.

Plano xz.

$$\mathbb{S}_1 = \frac{1}{2}ac(-\vec{a}_y)$$

Plano yz.

$$\mathbb{S}_2 = \frac{1}{2}bc(-\vec{a}_x)$$

Plano xy

$$\mathbb{S}_3 = \frac{1}{2}ab(-\vec{a}_z)$$

Plano ABC.

El plano se considera una superficie de nivel. La ecuación del plano es:

$$bcx + acy + abz = abc$$

La superficie equipotencial es:

$$V = k(bc x + ac y + ab z - abc) = 0$$

$$\nabla V = k(bc \vec{a}_x + ac \vec{a}_y + ab \vec{a}_z)$$

$$\vec{a}_N = \frac{\nabla V}{\nabla V} = \frac{k(bc \vec{a}_x + ac \vec{a}_y + ab \vec{a}_z)}{k[(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{bc \vec{a}_x + ac \vec{a}_y + ab \vec{a}_z}{[(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\mathbb{S}_4 = S_4 \vec{a}_N$$

$$S_5 = \mathbb{S}_4 \cdot \vec{a}_z = S_4 \vec{a}_N \cdot \vec{a}_z \longrightarrow S_4 = \frac{S_5}{\vec{a}_N \cdot \vec{a}_z}$$

$$\mathbb{S}_N = \frac{S_5}{\vec{a}_N \cdot \vec{a}_z} \vec{a}_N$$

$$S_5 = \frac{1}{2}ab \text{ y } \vec{a}_N \cdot \vec{a}_z = \frac{ab}{[(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\mathbb{S}_4 = \frac{1}{2}(bc \vec{a}_x + ac \vec{a}_y + ab \vec{a}_z)$$

$$\sum_1^4 \mathbb{S}_i = \frac{1}{2}ac(-\vec{a}_y) + \frac{1}{2}bc(-\vec{a}_x) + \frac{1}{2}ab(-\vec{a}_z) + \frac{1}{2}(bc \vec{a}_x + ac \vec{a}_y + ab \vec{a}_z) = 0 \quad \square$$

Ejemplo 16.

Si $\mathbb{F} = F_x \vec{a}_x + F_y \vec{a}_y + F_z \vec{a}_z$, expresar el vector $\mathbb{F}$ en coordenadas esféricas.

Solución.

Las componentes del vector en coordenadas esféricas se obtienen del siguiente modo:

$$F_r = \mathbb{F} \cdot \vec{a}_r \quad F_\theta = \mathbb{F} \cdot \vec{a}_\theta \quad F_\varphi = \mathbb{F} \cdot \vec{a}_\varphi$$

$$F_r = F \cdot \vec{a}_r = F_x \vec{a}_x \cdot \vec{a}_r + F_y \vec{a}_y \cdot \vec{a}_r + F_z \vec{a}_z \cdot \vec{a}_r$$

$$F_\theta = F \cdot \vec{a}_\theta = F_x \vec{a}_x \cdot \vec{a}_\theta + F_y \vec{a}_y \cdot \vec{a}_\theta + F_z \vec{a}_z \cdot \vec{a}_\theta$$

$$F_\varphi = F \cdot \vec{a}_\varphi = F_x \vec{a}_x \cdot \vec{a}_\varphi + F_y \vec{a}_y \cdot \vec{a}_\varphi + F_z \vec{a}_z \cdot \vec{a}_\varphi$$

Al remplazar los respectivos productos escalares, se tiene:

$$F_r = F_x \sin\theta \cos\varphi + F_y \sin\theta \sin\varphi + F_z \cos\theta$$

$$F_\theta = F_x \cos\theta \cos\varphi + F_y \cos\theta \sin\varphi - F_z \sin\theta$$

$$F_\varphi = -F_x \sin\varphi + F_y \cos\varphi$$

Si las ecuaciones anteriores se expresan en forma matricial, se obtiene:

$$\begin{vmatrix} F_r \\ F_\theta \\ F_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta \cos\varphi & \sin\theta \sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta \cos\varphi & \cos\theta \sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{vmatrix} \quad \square$$

Para hallar las componentes rectangulares en función de las componentes en coordenadas esféricas, se tiene:

$$\begin{vmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta \cos\varphi & \cos\theta \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi & \cos\theta \sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_r \\ F_\theta \\ F_\varphi \end{vmatrix} \quad \square$$

Nótese bien que la matriz que transforma los vectores unitarios del sistema de coordenadas cartesianas a esféricas es la misma que convierte las componentes de los vectores del sistema de coordenadas cartesianas a esféricas y viceversa.

Ejemplo 17.

Si $\mathbb{D} = 2x\vec{a}_x + y^2\vec{a}_y + z^2\vec{a}_z$. Hallar:

- $\nabla \cdot \mathbb{D}$ en coordenadas esféricas.
- $\nabla \cdot \mathbb{D}$ en coordenadas cartesianas.
- demostrar que las expresiones anteriores son equivalentes.
- verificar ambos miembros del teorema de Gauss, para una esfera de radio 1, centrada en el origen de coordenadas.

Solución.

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \quad y = r\sin\theta\sin\varphi \quad z = r\cos\theta$$

$$\begin{vmatrix} D_r \\ D_\theta \\ D_\varphi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2r\sin\theta\cos\varphi \\ r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi \\ r^2\cos^2\theta \end{vmatrix}$$

$$D_r = 2r\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^3\theta\sin^3\varphi + r^2\cos^3\theta$$

$$r^2 D_r = 2r^3\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^4\sin^3\theta\sin^3\varphi + r^4\cos^3\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) = 6r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + 4r^3\sin^3\theta\sin^3\varphi + 4r^3\cos^3\theta$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) = 6\sin^2\theta\cos^2\varphi + 4r\sin^3\theta\sin^3\varphi + 4r\cos^3\theta$$

$$D_\theta = 2r\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\cos\theta\sin^3\varphi - r^2\sin\theta\cos^2\theta$$

$$\sin\theta D_\theta = 2r\sin^2\theta\cos\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^3\theta\cos\theta\sin^3\varphi - r^2\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\text{sen} \theta D_\theta) = -2r \text{sen}^3 \theta \cos^2 \varphi + 4r \text{sen} \theta \cos^2 \theta \cos^2 \varphi - r^2 \text{sen}^4 \theta \text{sen}^3 \varphi + \\ 3r^2 \text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta \text{sen}^3 \varphi + 2r^2 \text{sen}^3 \theta \cos \theta - 2r^2 \text{sen} \theta \cos^3 \theta$$

$$\frac{1}{r \text{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\text{sen} \theta D_\theta) = -2 \text{sen}^2 \theta \cos^2 \varphi + 4 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi - r \text{sen}^3 \theta \text{sen}^3 \varphi + \\ 3r \text{sen} \theta \cos^2 \theta \text{sen}^3 \varphi + 2r \text{sen}^2 \theta \cos \theta - 2r \cos^3 \theta$$

$$D_\varphi = -2r \text{sen} \theta \text{sen} \varphi \cos \varphi + r^2 \text{sen}^2 \theta \text{sen}^2 \varphi \cos \varphi$$

$$\frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi} = r \text{sen} \theta [2 \text{sen}^2 \varphi - 2 \cos^2 \varphi - r \text{sen} \theta \text{sen}^3 \varphi + 2r \text{sen} \theta \text{sen} \varphi \cos^2 \varphi]$$

$$\frac{1}{r \text{sen} \theta} \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi} = 2 \text{sen}^2 \varphi - 2 \cos^2 \varphi - r \text{sen} \theta \text{sen}^3 \varphi + 2r \text{sen} \theta \text{sen} \varphi \cos^2 \varphi$$

$$\nabla \cdot \mathbb{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \text{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\text{sen} \theta D_\theta) + \frac{1}{r \text{sen} \theta} \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\nabla \cdot \mathbb{D} = 2 + 2r \text{sen} \theta \text{sen} \varphi + 2r \cos \theta$$

En coordenadas cartesianas si, $\nabla \cdot \mathbb{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$, se obtiene:

$$\nabla \cdot \mathbb{D} = 2 + 2y + 2z$$

En coordenadas esféricas: $y = r \text{sen} \theta \text{sen} \varphi$ $z = r \cos \theta$, así:

$$\nabla \cdot \mathbb{D} = 2 + 2r \text{sen} \theta \text{sen} \varphi + 2r \cos \theta$$

De este modo, la respuesta es equivalente.

En coordenadas cartesianas, se halló que: $\nabla \cdot \mathbb{D} = 2 + 2y + 2z$

$$\text{a. } \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbb{D} d\tau = \oint_S \mathbb{D} \cdot d\mathbb{S}$$

$$\int_{\tau} (2 + 2y + 2z) d\tau = 2 \int_{\tau} d\tau + 2 \int_{\tau} y d\tau + 2 \int_{\tau} z d\tau$$

$$2 \int_{\tau} d\tau = 2 \left[\frac{4\pi (1)^3}{3} \right] = \frac{8\pi}{3}$$

$$\int_{\tau} y d\tau = 0$$

$$\int_{\tau} z d\tau = 0$$

$$\int_{\tau} (2 + 2y + 2z) d\tau = \frac{8\pi}{3} + 0 + 0 = \frac{8\pi}{3}$$

b. En coordenadas esféricas, se halló que:

$$\nabla \cdot \mathbb{D} = 2 + 2r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi + 2r \cos \theta$$

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \mathbb{D} d\tau = \int_{\tau} (2 + 2r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi + 2r \cos \theta) d\tau$$

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \mathbb{D} d\tau = 2 \int_{\tau} d\tau + 2 \int_{\tau} r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi d\tau + 2 \int_{\tau} r \cos \theta d\tau$$

$$2 \int_{\tau} d\tau = \frac{8\pi}{3}$$

$$2 \int_{\tau} r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi d\tau = 2 \int_0^1 r^3 dr \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \varphi d\varphi = 0$$

$$2 \int_{\tau} r \cos \theta d\tau = 2 \int_0^1 r^3 dr \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \varphi d\varphi = 0$$

Por lo tanto:

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \mathbb{D} d\tau = \frac{8\pi}{3}$$

□

Ejemplo 18.

Si $\mathbb{E} = 4x\vec{a}_x - 2y^2\vec{a}_y + z^2\vec{a}_z$ evaluar ambos miembros del Teorema de Gauss para un cilindro de radio 2 y $0 \leq x \leq 3$. Ver Fig. 2.31.

Solución.

a. $\nabla \cdot \mathbb{E} = 4 - 4y + 2z$

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \mathbb{E} d\tau = 4 \int_{\tau} d\tau - 4 \int_{\tau} y d\tau + 2 \int_{\tau} z d\tau$$

$$\int_{\tau} d\tau = \pi 2^2 3 = 12\pi$$

$$\int_{\tau} y d\tau = 0$$

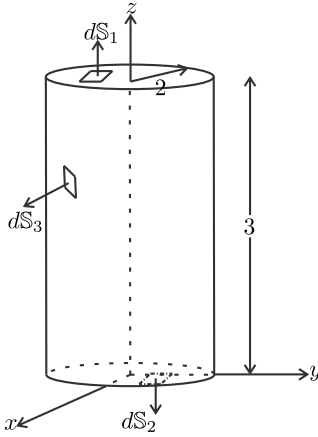


Figura 2.31 Ejemplo 18.

$$\int_{\tau} z d\tau = \frac{3}{2}\pi 2^2 3 = 18\pi$$

Por lo tanto:

$$\text{b. } \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbb{E} d\tau = 4(12\pi) - 4(0) + 2(18\pi) = 84\pi$$

□

$$\oint_S \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = \sum_1^3 \int_{S_i} \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S}$$

$$S_1: \quad 0 \leq r \leq 2 \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad z = 3$$

$$\mathbb{E} = (4x\vec{a}_x - 2y^2\vec{a}_y + z^2\vec{a}_z) \quad d\mathbb{S} = dS\vec{a}_z$$

$$\mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = z^2 dS|_{z=3} = 9dS$$

$$\int_{S_1} \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = 9 \int_{S_1} dS = 9\pi 2^2 = 36\pi$$

$$S_2: \quad 0 \leq r \leq 2 \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad z = 0$$

$$\mathbb{E} = (4x\vec{a}_x - 2y^2\vec{a}_y + z^2\vec{a}_z) \quad d\mathbb{S} = dS(-\vec{a}_z)$$

$$\mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = z^2(-dS)|_{z=0} = 0$$

$$\int_{S_2} \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = 0$$

$$S_3: \quad r = 2 \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad 0 \leq z \leq 3$$

$$\mathbb{E} = E_r \vec{a}_r + E_\varphi \vec{a}_\varphi + E_z \vec{a}_z \quad d\mathbb{S} = dS \vec{a}_r$$

$$\mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = (E_r \vec{a}_r + E_\varphi \vec{a}_\varphi + E_z \vec{a}_z) \cdot dS \vec{a}_r = E_r dS$$

Sólo se necesita la componente radial en coordenadas cilíndricas del campo vectorial, ya que el vector área lleva esta dirección.

$$E_r = E_x \vec{a}_x \cdot \vec{a}_r + E_y \vec{a}_y \cdot \vec{a}_r + E_z \vec{a}_z \cdot \vec{a}_r = 4r \cos^2 \varphi - 2r^2 \sin^3 \varphi|_{r=2}$$

$$E_r = 8 (\cos^2 \varphi - \sin^3 \varphi)$$

$$\int_{S_3} \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = 8 \int_0^3 \int_0^{2\pi} (\cos^2 \varphi - \sin^3 \varphi) r|_{r=2} d\varphi dz$$

$$\int_{S_3} \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = 48 \int_0^3 \int_0^{2\pi} (\cos^2 \varphi - \sin^3 \varphi) d\varphi = 48(\pi - 0) = 48\pi$$

Por lo tanto:

$$\oint_S \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = \sum_1^3 \int_{S_i} \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = 36\pi + 0 + 48\pi = 84\pi$$

$$\oint_S \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = 84\pi$$

□

Como se observa al evaluar ambos miembros del Teorema de Gauss los resultados son idénticos.

Ejemplo 19.

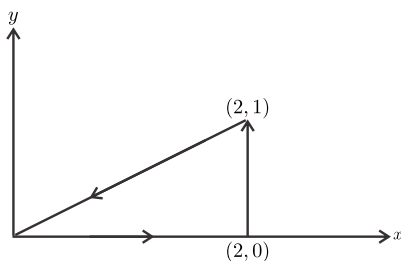


Figura 2.32 Ejemplo 19.

Si $F = (2x + y^2)\vec{a}_x + (3y - 4x)\vec{a}_y$ evaluar ambos miembros del Teorema de Stokes para la superficie encerrada por la trayectoria triangular mostrada en la Fig. 2.32.

Solución.

$$\text{a.} \quad \oint_C \mathbb{F} \cdot \vec{d\ell} = \sum_1^3 \mathbb{F} \cdot \vec{d\ell}$$

$$C_1: \quad 0 \leq x \leq 2 \quad y = 0 \quad z = 0$$

$$\vec{d\ell} = dx\vec{a}_x \quad \mathbb{F} \cdot \vec{d\ell} = (2x + y^2)dx|_{(x,0,0)}$$

$$\int_{C_1} \mathbb{F} \cdot \vec{d\ell} = 2 \int_0^{2\pi} x dx = 4$$

$$C_2: \quad x = 2 \quad 0 \leq y \leq 1 \quad z = 0$$

$$\vec{d\ell} = dy\vec{a}_y \quad \mathbb{F} \cdot \vec{d\ell} = (3y - 4x)dy|_{(2,y,0)}$$

$$\int_{C_2} \mathbb{F} \cdot \vec{d\ell} = \int_0^1 (3y - 8)dy = \left(\frac{3y^2}{2} - 8y \right) \Big|_0^1 = -\frac{13}{2}$$

$$C_3: \quad 0 \leq x \leq 2 \quad 0 \leq y \leq 1 \quad z = 0$$

$$\vec{d\ell} = -dx\vec{a}_x - dy\vec{a}_y \quad \vec{d\ell} = -dx \left(\vec{a}_x + \left| \frac{dy}{dx} \right| \vec{a}_y \right)$$

La trayectoria es un segmento de recta que se describe por $y = \frac{x}{2}$ y por lo tanto

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$. Entonces:

$$\vec{d\ell} = -dx \left(\vec{a}_x + \frac{1}{2}\vec{a}_y \right) \quad \vec{d\ell} = -\frac{dx}{2} (2\vec{a}_x + \vec{a}_y)$$

$$\mathbb{F} \cdot \vec{d\ell} = (2x + y^2)(-dx) + (3y - 4x) \left(-\frac{dx}{2} \right)$$

$$\int_{C_3} \mathbb{F} \cdot \vec{d\ell} = - \int_0^2 \left(2x + \frac{x^2}{4} + \frac{3x}{4} - \frac{4x}{2} \right) dx$$

$$\int_{C_3} \mathbb{F} \cdot \vec{d\ell} = -\frac{1}{4} \int_0^2 (x^2 + 3x) dx = -\frac{1}{4} \left(\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^2 = -\frac{13}{6}$$

$$\oint_C \mathbb{F} \cdot \vec{d\ell} = \sum_1^3 \mathbb{F} \cdot \vec{d\ell} = 4 - \frac{13}{2} - \frac{13}{6} = -\frac{14}{3}$$

□

$$\nabla \times \mathbb{F} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x + y^2 & 3y - 4x & 0 \end{vmatrix} = -2(y + 2)\vec{a}_z$$

$$\int_S \nabla \times \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} = -2 \int_S (y + 2)\vec{a}_z \cdot d\mathbb{S} = -2 \int_S y dS - 4 \int_S dS$$

$$\int_S \nabla \times \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} = -2y_c S - 4S = -2\left(\frac{1}{3}\right)(1) - 4(1)$$

$$\int_S \nabla \times \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} = -\frac{14}{3}$$

□

Como se observa al evaluar ambos miembros del Teorema del rotacional los resultados son idénticos.

Ejemplo 20.

Si $\mathbb{A} = (2x - y)\vec{a}_x - yz^2\vec{a}_y - y^2z\vec{a}_z$ evaluar ambos miembros del Teorema de Stokes o del rotacional para la semiesfera superior de la esfera $r = 1$. Ver Fig. 2.33.

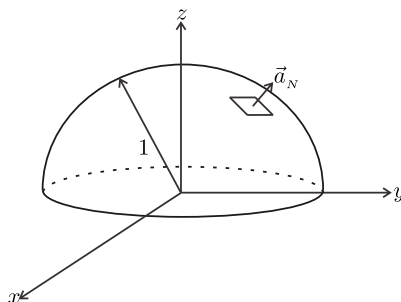


Figura 2.33 Ejemplo 20.

Solución.

$$S: \quad r = 1 \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$\nabla \times \mathbb{A} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x - y & -yz^2 & -y^2z \end{vmatrix} = \vec{a}_z$$

$$\int_S \nabla \times \mathbb{A} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{a}_z \cdot dS \vec{a}_r = \int_S dS \cos\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi \quad \square$$

$$C: \quad r = 1 \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$\vec{d\ell} = r d\varphi \vec{a}_\varphi$$

$$\mathbb{A} = (2r \sin\theta \cos\varphi - r \sin\theta \sin\varphi) \vec{a}_x - r \sin\theta \sin\varphi (r \cos\theta)^2 \vec{a}_y - (r \sin\theta \sin\varphi)^2 r \cos\theta \vec{a}_z$$

$$A_x = 2r \sin\theta \cos\varphi - r \sin\theta \sin\varphi \Big|_{(1, \frac{\pi}{2}, 2\pi)} = (2\cos\varphi - \sin\varphi)$$

$$A_y = r^3 \sin\theta \cos^2\theta \sin\varphi \Big|_{(1, \frac{\pi}{2}, 2\pi)} = 0$$

$$A_z = r^3 \sin^2\theta \cos\theta \sin^2\varphi \Big|_{(1, \frac{\pi}{2}, 2\pi)} = 0$$

$$\mathbb{A} \cdot \vec{d\ell} = [A_x \vec{a}_x + A_y \vec{a}_y + A_z \vec{a}_z] \cdot r d\varphi \vec{a}_\varphi = A_x \vec{a}_x \cdot r d\varphi \vec{a}_\varphi = -A_x \sin\varphi d\varphi$$

$$\oint_C \mathbb{A} \cdot \vec{d\ell} = \int_0^{2\pi} (-2\cos\varphi \sin\varphi + \sin^2\varphi) d\varphi$$

$$\oint_C \mathbb{A} \cdot \vec{d\ell} = \pi \quad \square$$

Ejemplo 21.

Si $\mathbb{F} = 18z\vec{a}_x - 12\vec{a}_y + 3y\vec{a}_z$ y S es la superficie del plano $2x + 3y + 6z = 12$ situada en el primer octante, hallar el flujo a través de ésta.

Solución.

Se obtiene la superficie de nivel $V = 2x + 3y + 6z - 12 = 0$

$$\nabla V = 2\vec{a}_x + 3\vec{a}_y + 6\vec{a}_z \quad \nabla V = \pm 7$$

El vector unitario normal al plano es:

$$\vec{a}_N = \frac{\nabla V}{|\nabla V|} = \frac{2\vec{a}_x + 3\vec{a}_y + 6\vec{a}_z}{\pm 7}$$

$$\nabla V \cdot \vec{a}_z = (2\vec{a}_x + 3\vec{a}_y + 6\vec{a}_z) \cdot \vec{a}_z = 6$$

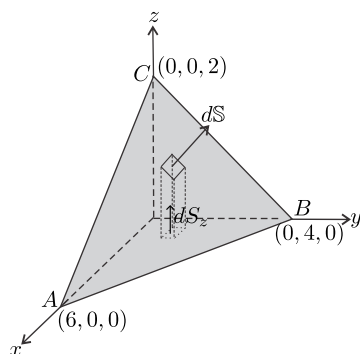


Figura 2.34 Ejemplo 21

$$d\mathbb{S} = \frac{\nabla V}{\nabla V \cdot \vec{a}_z} dx dy = \frac{2\vec{a}_x + 3\vec{a}_y + 6\vec{a}_z}{6} dS_z$$

$$\mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} = d\varphi = (18z\vec{a}_x - 12\vec{a}_y + 3y\vec{a}_z) \cdot \left(\frac{2\vec{a}_x + 3\vec{a}_y + 6\vec{a}_z}{6} \right) dS_z$$

$$d\varphi = \frac{36z - 36 + 18y}{6} dS_z = (3y + 6z - 6) dS_z$$

De la ecuación del plano:

$$z = \frac{12 - (2x + 3y)}{6}$$

$$d\varphi = (3y + 12 - 2x - 3y - 6) dS_z = (6 - 2x) dS_z$$

$$\varphi = 6 \int_S dS_z - 2 \int_S x dS_z = 6 \left[\frac{4(6)}{2} \right] - 2 \left(\frac{6}{3} \right) \left[\frac{4(6)}{2} \right]$$

$$\varphi = 24$$

□

Ejemplo 22.

Si $\mathbb{F} = z\vec{a}_x + x\vec{a}_y - 3y^2z\vec{a}_z$ y S es la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 16$ situada en el primer octante entre $0 \leq z \leq 5$, hallar el flujo a través de ésta.

Solución.

a. Proyección de S sobre el plano xz :

$$V = x^2 + y^2 - 16 = 0 \quad \nabla V = 2x\vec{a}_x + 2y\vec{a}_y \quad \nabla V \cdot \vec{a}_y = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$d\mathbb{S} = \frac{\nabla V}{\nabla V \cdot \vec{a}_y} dx dz = \frac{x\vec{a}_x + y\vec{a}_y}{y} dx dz$$

$$\nabla V \cdot \vec{a}_y = 2y$$

$$\mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} = d\varphi = (z\vec{a}_x + x\vec{a}_y - 3y^2z\vec{a}_z) \cdot \left(\frac{x\vec{a}_x + y\vec{a}_y}{y} \right) dx dz$$

$$d\varphi = \frac{xz + xy}{y} dx dz = \left(\frac{xz}{y} + x \right) dx dz$$

$$\varphi = \int_0^4 \frac{x dx}{\sqrt{16 - x^2}} \int_0^5 z dz + \int_0^4 x dx \int_0^5 dz = \int_0^4 \frac{x dx}{\sqrt{16 - x^2}} \frac{25}{2} + \frac{16}{2} \quad (5)$$

$$\int_0^4 \frac{x dx}{\sqrt{16 - x^2}} \rightarrow \begin{cases} u^2 = 16 - x^2 & u du = -x dx \\ -\int_4^0 \frac{u du}{u} & \int_0^4 du = 4 \end{cases}$$

$$\varphi = 90$$

□

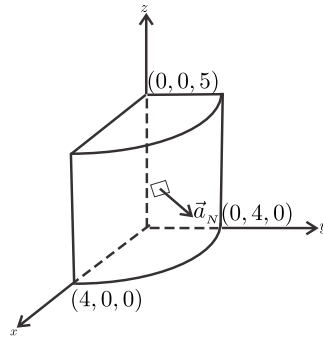


Figura 2.35 Ejemplo 22.

b. Proyección de S sobre el plano yz :

$$\nabla V \cdot \vec{a}_x = 2x$$

$$d\mathbb{S} = \frac{\nabla V}{\nabla V \cdot \vec{a}_z} dx dz = \frac{x\vec{a}_x + y\vec{a}_y}{x} dy dz$$

$$\mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} = d\varphi = (z\vec{a}_x + x\vec{a}_y - 3y^2z\vec{a}_z) \cdot \left(\frac{x\vec{a}_x + y\vec{a}_y}{x} \right) dy dz$$

$$d\varphi = \frac{xz + xy}{x} dy dz = (z + y) dy dz$$

$$\varphi = \int_0^4 dy \int_0^5 z dz + \int_0^4 y dy \int_0^5 dz$$

$$\varphi = 90$$

□

c. Cálculo del flujo sobre la superficie S .

En coordenadas cilíndricas, la única componente del campo que contribuye al flujo es la radial.

$$\mathbb{F} = F_r \vec{a}_r + F_\theta \vec{a}_\theta + F_\varphi \vec{a}_\varphi \quad \mathbb{F} \cdot \vec{a}_r = F_r \vec{a}_r \cdot \vec{a}_r + F_\theta \vec{a}_\theta \cdot \vec{a}_r + F_\varphi \vec{a}_\varphi \cdot \vec{a}_r = F_r$$

$$\vec{a}_x \cdot \vec{a}_r = \cos\varphi \quad \vec{a}_y \cdot \vec{a}_r = \sin\varphi \quad \vec{a}_z \cdot \vec{a}_r = 0 \quad d\mathbb{S} = 4d\varphi dz \vec{a}_r$$

De este modo:

$$F_r = F_x \cos\varphi + F_y \sin\varphi = z \cos\varphi + x \sin\varphi = z \cos\varphi + 4 \cos\varphi \sin\varphi$$

$$\oint_S \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} = \int_0^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (z \cos\varphi + 4 \cos\varphi \sin\varphi) 4d\varphi dz$$

$$\oint_S \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} = 4 \left(\frac{25}{2} \right) \sin\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 16 \sin^2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\oint_S \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} = 90$$

□

Ejemplo 23.

Si $\mathbb{F} = y\vec{a}_x - x\vec{a}_y$, verificar el Teorema de Stokes alrededor de la trayectoria cerrada en el plano xy que sigue la línea $y = x + 2$ y la parábola $y = x^2$. Ver Fig. 2.36.

Solución.

Se determinan los puntos de corte:

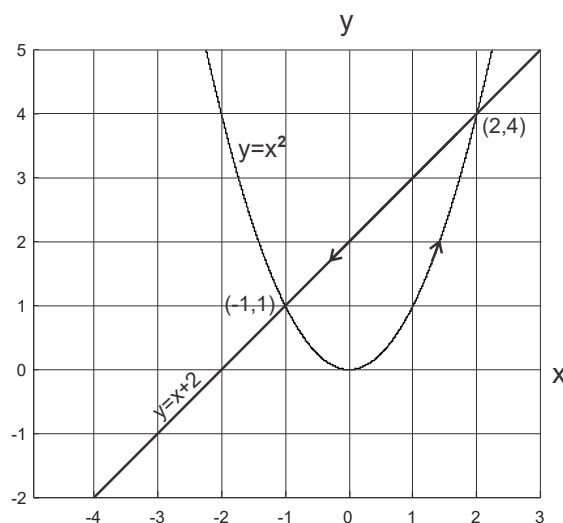


Figura 2.36 Ejemplo 23.

$$x^2 = x + 2 \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad \begin{cases} x = 2 & \longrightarrow y = 4 \\ x = -1 & \longrightarrow y = 1 \end{cases}$$

Los puntos de corte son: $(2, 4)$ y $(-1, 1)$.

$$\text{a.} \quad \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{a}_z$$

$$\int_S \nabla \times \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} = \int -2\vec{a}_z \cdot dS \vec{a}_z = -2 \int_S dS = -2 \int_1^2 y dx = -2 \int_1^2 (x + 2 - x^2) dx$$

$$\int_S \nabla \times \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} = -2 \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = -9 \quad \square$$

$$\text{b.} \quad \oint_C \mathbb{F} \cdot d\vec{\ell} = \sum_1^2 \int_C \mathbb{F} \cdot d\vec{\ell}$$

Para la trayectoria C_1 :

$$y = x + 2 \quad -1 \leq x \leq 2 \quad 1 \leq y \leq 4 \quad \frac{dy}{dx} = 1$$

$$d\vec{\ell} = -dx \left(\vec{a}_x + \left| \frac{dy}{dx} \right| \vec{a}_y \right) = -dx (\vec{a}_x + \vec{a}_y)$$

$$\int_{C_1} \mathbb{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{-1}^2 (y\vec{a}_x - x\vec{a}_y) \cdot [-dx (\vec{a}_x + \vec{a}_y)] = \int_{-1}^2 (x + 2 - x) = -2x \Big|_{-1}^2 = -6$$

Para la trayectoria C_2 :

$$y = x^2 \quad -1 \leq x \leq 2 \quad 1 \leq y \leq 4 \quad \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$d\vec{\ell} = dx \left(\vec{a}_x + \left| \frac{dy}{dx} \right| \vec{a}_y \right) = dx (\vec{a}_x + 2x\vec{a}_y)$$

$$\int_{C_2} \mathbb{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{-1}^2 (y\vec{a}_x - x\vec{a}_y) \cdot (\vec{a}_x + 2x\vec{a}_y) dx = \int_{-1}^2 (x^2 - 2x^2) dx = -\frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^2 = -3$$

$$\oint_C \mathbb{F} \cdot d\vec{\ell} = \sum_1^2 \int_C \mathbb{F} \cdot d\vec{\ell} = -6 - 3 = -9 \quad \square$$

Como se nota al evaluar ambos miembros del Teorema del Rotacional los resultados son idénticos.

Ejemplo 24.

Si $\mathbb{R} = x(t) \vec{a}_x + y(t) \vec{a}_y + z(t) \vec{a}_z$, hallar la posición, la velocidad y la aceleración en coordenadas cilíndricas.

Solución.

$$\mathbb{R} = x(t) \vec{a}_x + y(t) \vec{a}_y + z(t) \vec{a}_z = r(t) \vec{a}_r + z(t) \vec{a}_z \quad \square$$

$$\vec{v} = \frac{d\mathbb{R}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{a}_r + r \frac{d\vec{a}_r}{dt} + \frac{dz}{dt} \vec{a}_z + z \frac{d\vec{a}_z}{dt}$$

Pero:

$$\vec{a}_r = \cos\varphi \vec{a}_x + \sin\varphi \vec{a}_y \quad \frac{d\vec{a}_r}{d\varphi} = -\sin\varphi \vec{a}_x + \cos\varphi \vec{a}_y = \vec{a}_\varphi \quad \frac{d\vec{a}_z}{dt} = 0$$

$$\frac{d\vec{a}_r}{dt} = \frac{d\vec{a}_r}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \vec{a}_\varphi$$

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{a}_r + r \frac{d\vec{a}_r}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{dz}{dt} \vec{a}_z = \frac{dr}{dt} \vec{a}_r + r \frac{d\varphi}{dt} \vec{a}_\varphi + \frac{dz}{dt} \vec{a}_z$$

$$\text{Se define: } \dot{r} = \frac{dr}{dt} \quad \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} \quad \dot{z} = \frac{dz}{dt}$$

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{a}_r + r \dot{\varphi} \vec{a}_\varphi + \dot{z} \vec{a}_z \quad \square$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = \frac{d^2 r}{dt^2} \vec{a}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\vec{a}_r}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \vec{a}_\varphi + r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \vec{a}_\varphi + r \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\vec{a}_\varphi}{dt} + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{a}_z$$

$$\frac{d\vec{a}_\varphi}{dt} = \frac{d\vec{a}_\varphi}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -(\cos\varphi \vec{a}_x + \sin\varphi \vec{a}_y) \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{d\vec{a}_\varphi}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} \vec{a}_r \quad \frac{d\vec{a}_r}{dt} = \frac{d\vec{a}_r}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{a}_\varphi$$

$$\vec{a} = \frac{d^2 r}{dt^2} \vec{a}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \vec{a}_\varphi + \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \vec{a}_\varphi + r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \vec{a}_\varphi - r \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \vec{a}_r + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{a}_z$$

Al agrupar se obtiene:

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] \vec{a}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) \vec{a}_\varphi + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{a}_z$$

$$\text{ya que } \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = \frac{1}{r} \left(2r \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + r^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right)$$

La aceleración toma la siguiente forma:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \vec{a}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \vec{a}_\varphi + \ddot{z} \vec{a}_z \quad \square$$

Ejemplo 25.

Demostrar que $\int_{\tau} \nabla \times \mathbb{G} d\tau = - \oint_S \mathbb{G} \times d\mathbb{S}$.

Solución.

En el Teorema de la Divergencia o de Gauss $\int_{\tau} \nabla \cdot \mathbb{G} d\tau = \oint_S \mathbb{G} \cdot d\mathbb{S}$, se hace $\mathbb{G} = \mathbb{F} \times \mathbb{C}$ donde $\mathbb{C}$ es un vector constante.

$$\mathbb{G} = \mathbb{F} \times \mathbb{C} = -\mathbb{C} \times \mathbb{F}$$

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \mathbb{G} d\tau = \oint_S \mathbb{G} \cdot d\mathbb{S} \quad \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbb{F} \times \mathbb{C} d\tau = - \oint_S \mathbb{C} \times \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S}$$

$$\int_{\tau} \nabla \times \mathbb{F} \cdot \mathbb{C} d\tau = - \oint_S \mathbb{C} \cdot \mathbb{F} \times d\mathbb{S} \quad \mathbb{C} \cdot \int_{\tau} \nabla \times \mathbb{F} d\tau = -\mathbb{C} \cdot \oint_S \mathbb{F} \times d\mathbb{S}$$

$$\int_{\tau} \nabla \times \mathbb{F} d\tau = - \oint_S \mathbb{F} \times d\mathbb{S} \quad \square$$

Ejemplo 26.

Demostrar que:

a. $\nabla \cdot \mathbb{B} = 0$ se puede deducir a partir de $\nabla \times \mathbb{E} = -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}$.

b. $\nabla \cdot \mathbb{D} = \rho$ se puede deducir a partir de $\nabla \times \mathbb{H} = \mathbb{J} + \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial t}$.

Solución.

a. $\nabla \times \mathbb{E} = -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} \quad \nabla \cdot \nabla \times \mathbb{E} = -\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbb{B})$

$$\nabla \cdot \mathbb{B} = k \quad \square$$

b. $\nabla \times \mathbb{H} = \mathbb{J} + \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial t} \quad \nabla \cdot \nabla \times \mathbb{H} = \nabla \cdot \mathbb{J} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial t}$

De la ecuación de conservación de la carga:

$$\nabla \cdot \mathbb{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbb{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbb{J} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial t} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbb{J} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbb{D}) = 0$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbb{D}) - \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbb{D} - \rho) = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbb{D} - \rho = C$$

□

En un volumen τ limitado por una superficie S , el campo originado en un tiempo pasado puede anularse y la densidad de carga volumétrica removerse y así las constantes se hacen cero y se obtiene la demostración solicitada.

Ejemplo 27.

En un medio homogéneo, lineal e isótropo la densidad volumétrica de carga es cero. Hallar las ecuaciones de onda para:

- $\mathbb{E}$
- $\mathbb{H}$
- las ecuaciones de onda para un medio dieléctrico
- las ecuaciones de onda para el espacio libre

Solución.

$$a. \quad \nabla \times \mathbb{E} = -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbb{E}) = -\mu \nabla \times \left(\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial t} \right) \rightarrow \nabla (\nabla \cdot \mathbb{E}) - \vec{\nabla} \nabla \cdot \mathbb{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbb{H}) .$$

$\vec{\nabla}$: laplaciano vectorial

$$\nabla \cdot \mathbb{D} = \rho \quad \varepsilon \nabla \cdot \mathbb{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \mathbb{E} = \mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbb{H}) = \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{g} \mathbb{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} \right)$$

$$\vec{\nabla} \mathbb{E} - \mu \mathbf{g} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbb{E}}{\partial t^2} = 0$$

□

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbb{H}) - \vec{\nabla} \mathbb{H} = \mathbf{g} \nabla \times \mathbb{E} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbb{E})$$

$$b. \quad \nabla \times \mathbb{H} = \mathbf{g} \mathbb{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbb{H}) = \mathbf{g} \nabla \times \mathbb{E} + \varepsilon \nabla \times \left(\frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbb{H}) - \vec{\nabla} \mathbb{H} = \mathbf{g} \nabla \times \mathbb{E} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbb{E})$$

$$\nabla \cdot \mathbb{B} = 0 \quad \mu \nabla \cdot \mathbb{H} = 0$$

$$\vec{\nabla} \mathbb{H} = \mu \mathbf{g} \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial t} + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbb{H}}{\partial t^2}$$

$$\vec{\nabla} \mathbb{H} - \mu \mathbf{g} \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbb{H}}{\partial t^2} = 0 \quad \square$$

Las soluciones a este problema se denominan ecuaciones de onda amortiguadas no homogéneas.

$$\text{En general: } \begin{vmatrix} \vec{\nabla} \mathbb{E} \\ \vec{\nabla} \mathbb{H} \end{vmatrix} - \mu \mathbf{g} \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial t} \end{vmatrix} - \mu \varepsilon \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \mathbb{E}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \mathbb{H}}{\partial t^2} \end{vmatrix} = 0 \quad \square$$

c. Un dieléctrico o medio no conductor se caracteriza porque su conductividad es nula o sea $\mathbf{g} = 0$, entonces:

$$\begin{vmatrix} \vec{\nabla} \mathbb{E} \\ \vec{\nabla} \mathbb{H} \end{vmatrix} - \mu \varepsilon \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \mathbb{E}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \mathbb{H}}{\partial t^2} \end{vmatrix} = 0 \quad \square$$

d. Para el espacio libre $\varepsilon = \varepsilon_o \quad \mu = \mu_o$

Por lo tanto:

$$\begin{vmatrix} \vec{\nabla} \mathbb{E} \\ \vec{\nabla} \mathbb{H} \end{vmatrix} - \mu_o \varepsilon_o \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \mathbb{E}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \mathbb{H}}{\partial t^2} \end{vmatrix} = 0 \text{ . Pero } \mu_o \varepsilon_o c^2 = 1 \rightarrow \mu_o \varepsilon_o = \frac{1}{c^2}$$

Finalmente se tiene:

$$\begin{vmatrix} \vec{\nabla} \mathbb{E} \\ \vec{\nabla} \mathbb{H} \end{vmatrix} - \frac{1}{c^2} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \mathbb{E}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \mathbb{H}}{\partial t^2} \end{vmatrix} = 0 \quad \square$$

Ejemplo 28.

$\mathbb{S} = \mathbb{E} \times \mathbb{H}$ es el vector de Poynting, hallar el flujo neto de éste.

Solución.

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbb{E} &= -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial t} & \nabla \times \mathbb{H} &= \mathbb{J} + \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial t} = \mathbf{g}\mathbb{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbb{S} &= \nabla \cdot \mathbb{E} \times \mathbb{H} = \mathbb{H} \cdot \nabla \times \mathbb{E} - \mathbb{E} \cdot \nabla \times \mathbb{H} \\ \nabla \cdot \mathbb{S} &= -\mathbb{H} \cdot \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} - \mathbb{E} \cdot \left(\mathbf{g}\mathbb{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} \right) & -\nabla \cdot \mathbb{S} &= \mathbb{H} \cdot \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} + \mathbb{J} \cdot \mathbb{E} + \mathbb{E} \cdot \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial t} (\mathbb{B} \cdot \mathbb{H}) &= \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} \cdot \mathbb{H} + \mathbb{B} \cdot \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} \cdot \mathbb{H} + \mathbb{H} \cdot \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} = 2\mathbb{H} \cdot \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} \\ \mathbb{H} \cdot \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbb{B} \cdot \mathbb{H})\end{aligned}$$

De modo similar, se llega a:

$$\mathbb{E} \cdot \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbb{E} \cdot \mathbb{D})$$

Así:

$$\begin{aligned}-\nabla \cdot \mathbb{S} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbb{B} \cdot \mathbb{H}) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbb{E} \cdot \mathbb{D}) + \mathbb{E} \cdot \mathbb{J} \\ -\int_{\tau} \nabla \cdot \mathbb{S} d\tau &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \left[\frac{1}{2} (\mathbb{B} \cdot \mathbb{H}) + \frac{1}{2} (\mathbb{E} \cdot \mathbb{D}) \right] d\tau + \int_{\tau} \mathbb{E} \cdot \mathbb{J} d\tau\end{aligned}$$

Al aplicar el Teorema de Gauss, se llega a:

$$-\oint_{\Sigma} \mathbb{S} \cdot \vec{d\Sigma} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \left[\frac{1}{2} (\mathbb{B} \cdot \mathbb{H}) + \frac{1}{2} (\mathbb{E} \cdot \mathbb{D}) \right] d\tau + \int_{\tau} \mathbb{E} \cdot \mathbb{J} d\tau \quad \square$$

Donde:

$-\oint_{\Sigma} \mathbb{S} \cdot \vec{d\Sigma}$: flujo neto de potencia hacia el interior del volumen τ limitado por la superficie Σ .

$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \left[\frac{1}{2} (\mathbb{B} \cdot \mathbb{H}) + \frac{1}{2} (\mathbb{E} \cdot \mathbb{D}) \right] d\tau$: rapidez de variación de la energía electromagnética total en el interior del volumen τ limitado por la superficie Σ .

$\int_{\tau} \mathbb{E} \cdot \mathbb{J} d\tau$: potencia disipada en el interior del volumen τ limitado por la superficie Σ .

$\mathbb{S} = \mathbb{E} \times \mathbb{H}$: vector de Poynting o densidad de flujo de potencia.

Ejemplo 29.

Hallar:

- $P_1(\cos\theta)$
- $P_2(\cos\theta)$
- $P_3(\cos\theta)$
- $P_4(\cos\theta)$
- Escribir un programa en MatLab que dibuje los anteriores polinomios de Legendre en la misma gráfica.

Solución.

Para calcular los polinomios de Legendre se utiliza la fórmula de Rodrigues:

$$P_m^0 = P_m(u) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{du^m} (u^2 - 1)^m \quad u = \cos\theta$$

- a. En este caso $m = 1$, por lo tanto:

$$P_1(u) = \frac{1}{(2)1!} \frac{d}{du} (u^2 - 1) = \frac{1}{2} 2u = u$$

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta \quad \square$$

- b. En este caso $m = 2$, por lo tanto:

$$P_2(u) = \frac{1}{2^2 2!} \frac{d^2}{du^2} (u^2 - 1)^2 = \frac{1}{8} \frac{d^2}{du^2} (u^4 - 2u^2 + 1) = \frac{1}{8} \frac{d}{du} (4u^3 - 4u)$$

$$P_2(u) = \frac{1}{8} (12u^2 - 4) = \frac{1}{2} (3u^2 - 1)$$

$$P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2} (3\cos^2\theta - 1) \quad \square$$

- c. En este caso $m = 3$, por lo tanto:

$$P_3(u) = \frac{1}{2^3 3!} \frac{d^3}{du^3} (u^2 - 1)^3 = \frac{1}{48} \frac{d^3}{du^3} (u^6 - 3u^4 + 3u^2 - 1)$$

$$P_3(u) = \frac{1}{48} \frac{d^2}{du^2} (6u^5 - 12u^3 + 6u) = \frac{1}{48} \frac{d}{du} (30u^4 - 36u^2 + 6)$$

$$P_3(u) = \frac{1}{48} \frac{d}{du} (120u^3 - 72u) = \frac{1}{2} (5u^3 - 3u)$$

$$P_3(\cos\theta) = \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta) \quad \square$$

d. En este caso $m = 4$, por lo tanto:

$$P_4(u) = \frac{1}{2^4 4!} \frac{d^4}{du^4} (u^2 - 1)^4 = \frac{1}{16(24)} \frac{d^4}{du^4} (u^8 - 4u^6 + 6u^4 - 4u^2 + 1)$$

$$P_4(u) = \frac{1}{48} \frac{d^3}{du^3} (u^7 - 3u^5 + 3u^3 - u)$$

$$P_4(u) = \frac{1}{48} \frac{d^2}{du^2} (7u^6 - 15u^4 + 9u^2 - 1)$$

$$P_4(u) = \frac{1}{8} \frac{d}{du} (7u^5 - 10u^3 + 3u)$$

$$P_4(u) = \frac{1}{8} (35u^4 - 30u^2 + 3)$$

$$P_4(\cos\theta) = \frac{1}{8} (35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3) \quad \square$$

e. Programa en MatLab que dibuja los anteriores polinomios de Legendre en la misma gráfica.

$x = 0 : \pi/1000 : 2 * \pi; u = \cos(x);$

$P1 = u; P2 = (3 * u. \wedge 2 - 1) / 2; ; P3 = (5 * u. \wedge 3 - 3 * u) / 2;$

$P4 = (35 * u. \wedge 4 - 30 * u \wedge 2 + 3) / 8;$

`plot(x, P1); hold on`

`plot(x, P2); hold on`

`plot(x, P3); hold on`

`plot(x, P4); hold on`

Al correr el programa anterior en el MatLab, la pantalla del p.c. despliega la Fig. 2.37.

Ejemplo 30.

Utilizar las Fórmulas de Recurrencia para hallar $P_5(u)$. Verificar mediante la Fórmula de Rodrigues. Escribir un programa en MatLab que dibuje $P_5(u)$.

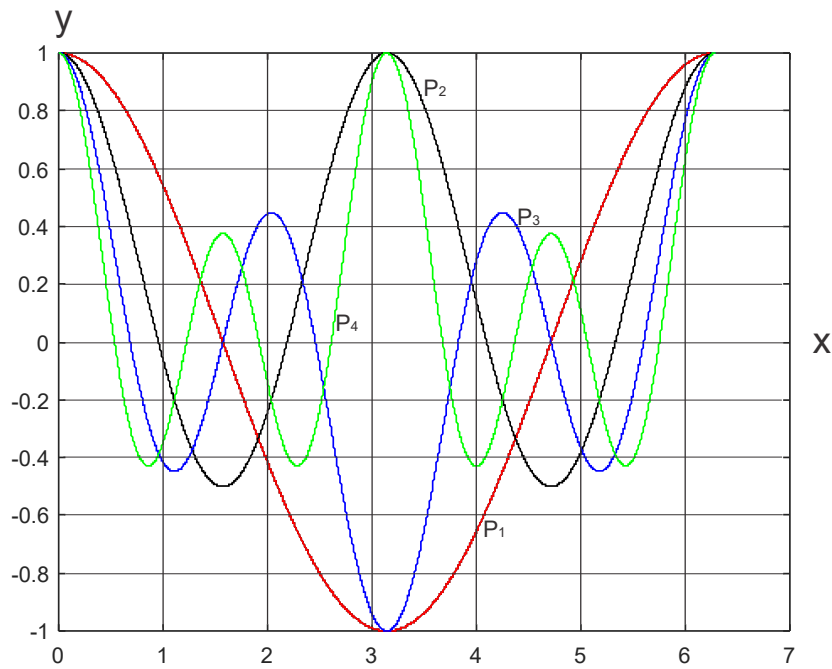


Figura 2.37 Ejemplo 29.

Solución.

$$\text{I. } (m+1)P_{m+1}(u) = (2m+1)uP_m(u) - mP_{m-1}(u).$$

Para aplicar la Fórmula de Recurrencia es necesario conocer los dos polinomios anteriores.

En este caso $m = 4$, se tiene:

$$5P_5(u) = 9uP_4(u) - 4P_3(u)$$

$$5P_5(u) = \frac{9}{8}u(35u^4 - 30u^2 + 3) - 2(5u^3 - 3u) = \frac{315u^5 - 350u^3 + 75u}{8}$$

$$P_5(u) = \frac{63u^5 - 70u^3 + 15u}{8}$$

$$P_5(\cos\theta) = \frac{63\cos^5\theta - 70\cos^3\theta + 15\cos\theta}{8}$$

□

$$\text{II. } \frac{u^2 - 1}{m} \frac{dP_m(u)}{du} = uP_m(u) - P_{m-1}(u)$$

En este caso $m = 6$:

$$P_6(u) = \frac{231u^6 - 315u^4 + 105u^2 - 5}{16}$$

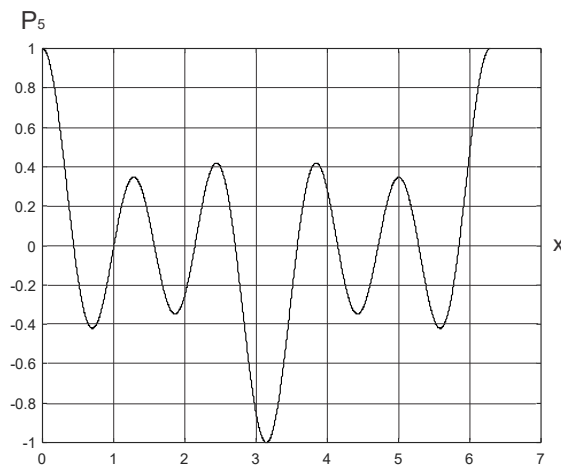


Figura 2.38 Ejemplo 30.

$$\frac{u^2 - 1}{6} \frac{dP_6(u)}{du} = uP_6(u) - P_5(u)$$

$$P_5(u) = uP_6(u) - \frac{u^2 - 1}{6} \frac{dP_6(u)}{du}$$

$$P_5(u) = \frac{231u^7 - 315u^5 + 105u^3 - 5u}{16} - \frac{(231u^7 - 441u^5 + 245u^3 - 35u)6}{6(16)}$$

$$P_5(u) = \frac{1}{8} (63u^5 - 70u^3 + 15u)$$

$$P_5(\cos\theta) = \frac{1}{8} (63\cos^5\theta - 70\cos^3\theta + 15\cos\theta)$$

□

$$\text{III. } (2m+1)P_m(u) = \frac{d}{du} [P_{m+1}(u) - P_{m-1}(u)]$$

En este caso $m = 5$:

$$P_6(u) = \frac{231u^6 - 315u^4 + 105u^2 - 5}{16}$$

$$P_4(u) = \frac{35u^4 - 30u^2 + 3}{8}$$

$$(11) P_5(u) = \frac{d}{du} [P_6(u) - P_4(u)] = \frac{d}{du} \left[\frac{231u^6 - 385u^4 + 165u^2 - 11}{16} \right]$$

$$(11) P_5(u) = \frac{(126u^5 - 140u^3 + 30u)11}{16}$$

$$P_5(u) = \frac{63u^5 - 70u^3 + 15u}{8} \quad \square$$

IV. En la Fórmula de Rodrigues $m = 5$, entonces:

$$P_5(u) = \frac{1}{2^5 5!} \frac{d^5}{du^5} (u^2 - 1)^5 = \frac{1}{32(120)} \frac{d^5}{du^5} (u^{10} - 5u^8 + 10u^6 - 10u^4 + 5u^2 - 1)$$

$$P_5(u) = \frac{1}{32(12)} \frac{d^4}{du^4} (u^9 - 4u^7 + 6u^5 - 4u^3 + u)$$

$$P_5(u) = \frac{1}{32(12)} \frac{d^3}{du^3} (9u^8 - 28u^6 + 30u^4 - 12u^2 + 1)$$

$$P_5(u) = \frac{1}{16} \frac{d^2}{du^2} (3u^7 - 7u^5 + 5u^3 - u)$$

$$P_5(u) = \frac{1}{16} \frac{d}{du} (21u^6 - 35u^4 + 15u^2 - 1)$$

$$P_5(u) = \frac{1}{8} (63u^5 - 70u^3 + 15u)$$

$$P_5(\cos\theta) = \frac{1}{8} (63\cos^5\theta - 70\cos^3\theta + 15\cos\theta) \quad \square$$

Programa en MatLab que dibuja $P_5(u)$.

$x = 0 : \pi/1000 : 2 * \pi; u = \cos(x);$

$P5(u) = (63 * u.^5 - 70 * u.^3 + 15 * u) / 8$

Ejemplo 31.

Dos cargas puntuales $+Q$ y $-Q$ se encuentran en $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ respectivamente. Hallar la ecuación de las líneas de fuerza en el plano xy y la ecuación de las equipotenciales en un punto P donde $V = V_o$.

Solución.

$$\vec{r}_1 = (x - a) \vec{a}_x + y \vec{a}_y \quad r_1 = [(x - a)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{r}_2 = (x + a) \vec{a}_x + y \vec{a}_y \quad r_2 = [(x + a)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \left\{ \frac{1}{[(x - a)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{[(x + a)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}} \right\}$$

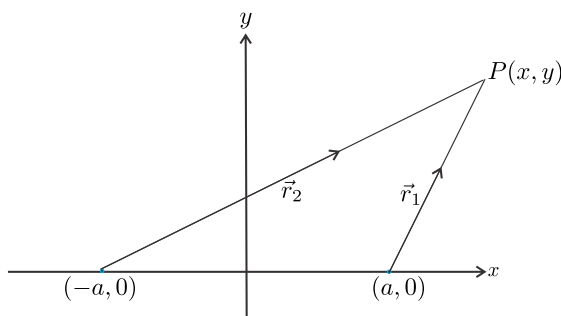


Figura 2.39 Ejemplo 31.

Si $r_1 = r_2$, entonces $V=0$ corresponde a puntos situados en una superficie equipotencial situada en el plano yz .

$$\nabla V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \nabla \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad \mathbb{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \left\{ \frac{(x-a)\vec{a}_x + y\vec{a}_y}{[(x-a)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{(x+a)\vec{a}_x + y\vec{a}_y}{[(x+a)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \left\{ \frac{x-a}{[(x-a)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{x+a}{[(x+a)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

$$E_y = \frac{Qy}{4\pi\epsilon_o} \left\{ \frac{1}{[(x-a)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{[(x+a)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

Se define: $s = \frac{x-a}{y} \quad t = \frac{x+a}{y}$

De este modo se obtiene:

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o y^2} \left[\frac{s}{(s^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{t}{(t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$E_y = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o y^2} \left[\frac{1}{(s^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{\frac{1}{(s^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{s}{(s^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{t}{(t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}} = \frac{dy}{dx}$$

$$\begin{aligned} sy = x - a & \quad dx = yds + sdy \\ ty = x + a & \quad dx = ydt + tdy \end{aligned}$$

$$yds + sdy = ydt + tdy \rightarrow dy = y \frac{ds - dt}{t - s}$$

Para dx se obtiene: $dx = ydt + ty \frac{ds - dt}{t - s} \quad dx = y \frac{tds - sdt}{t - s}$

Por lo tanto: $\frac{dy}{dx} = \frac{y \frac{ds - dt}{t - s}}{y \frac{tds - sdt}{t - s}} = \frac{\frac{ds}{dt} - 1}{t \frac{ds}{dt} - s}$

Entonces:

$$\frac{\frac{1}{(s^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{s}{(s^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{t}{(t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}} = \frac{\frac{ds}{dt} - 1}{t \frac{ds}{dt} - s}$$

Al simplificar se llega a:

$$\begin{aligned} \frac{(s^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{(t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{ds}{dt} \rightarrow \int \frac{ds}{(s^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} + C \\ \frac{s}{\sqrt{s^2 + 1}} &= \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} + C \end{aligned}$$

Si se remplazan los valores de s y t , se obtiene:

$$\frac{x - a}{\sqrt{(x - a)^2 + y^2}} = \frac{x + a}{\sqrt{(x + a)^2 + y^2}} + C$$

□

Para las equipotenciales, se utiliza la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{\frac{s}{(s^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{t}{(t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{(s^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}} = -\frac{dx}{dy}$$

para el lector, queda como trabajo hallar la solución, la cual es:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \left[\frac{1}{\sqrt{(x - a)^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x + a)^2 + y^2}} \right]$$

□

2.19. Problemas.

Problema 1.

Hallar el ángulo que forman dos diagonales de un cubo.

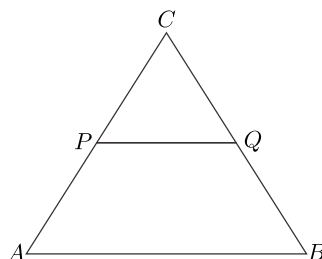


Figura 2.40 Problema 2.

Problema 2.

ABC es un triángulo. P y Q son los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Demostrar que $\overline{PQ}$:

- es paralela a $\overline{AB}$
- $\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{AB}$

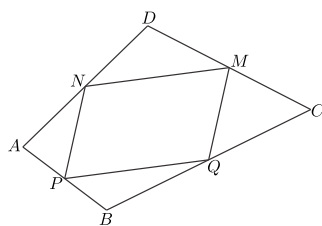


Figura 2.41 Problema 3.

Problema 3.

$ABCD$ es un cuadrilátero. P , Q , M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ respectivamente, si se unen demostrar que resulta un paralelogramo cuyos lados son iguales a la mitad de las diagonales.

Problema 4.

Si $V = 3x^2z - y^2z^3 + 4x^3y + 2x - 3y - 5$. Hallar $\nabla^2 V$.

Problema 5.

Si $\nabla \times \mathbb{A} = 0$ y $\nabla \times \mathbb{B} = 0$, demostrar que $\nabla \cdot \mathbb{A} \times \mathbb{B} = 0$.

Problema 6.

Si $\mathbb{F} = r^3 \vec{a}_r$, en coordenadas esféricas.

- clasificar el campo
- hallar la respectiva función potencial escalar o vectorial a partir de la cual se puede obtener.
- el trabajo para llevar una partícula en este campo desde $(0, 1, -1)$ a $(\frac{\pi}{2}, -1, 2)$

Problema 7.

Si $\mathbb{E} = (y^2 \cos x + z^3) \vec{a}_x + (2y \sin x - 4) \vec{a}_y + (3xz^2 + 2) \vec{a}_z$

- clasificar el campo
- hallar la respectiva función potencial escalar o vectorial a partir de la cual se puede obtener

Problema 8.

La velocidad angular de un sólido rígido que gira alrededor de un eje fijo viene dada por $\vec{\omega} = 4\vec{a}_x + \vec{a}_y - 2\vec{a}_z$. Hallar la velocidad tangencial de un punto P del sólido cuyo vector posición respecto de un punto del eje es $2\vec{a}_x - 3\vec{a}_y + \vec{a}_z$.

Problema 9.

Hallar $\int_S \sqrt{x^2 + y^2} dS$, si S es una superficie del plano $\theta = \frac{\pi}{2}$ limitada por $r = 6$.

Problema 10.

Demostrar que un ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

Problema 11.

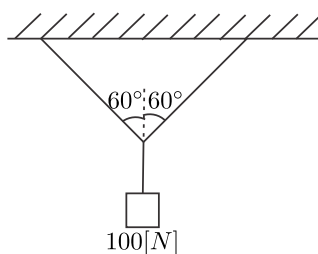


Figura 2.42 Problema 11.

Un bloque de $100[Nw]$ pende del centro de una cuerda como se muestra en la Fig.2.42. Hallar la tensión en las cuerdas.

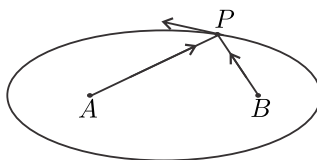


Figura 2.43 Problema 12.

Problema 12.

P es un punto de la elipse cuyos focos son A y B . $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ son los segmentos de línea que unen los focos con P . Demostrar que estos segmentos forman ángulos iguales con la tangente a la elipse en el punto P .

Problema 13.

Demostrar que $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \times \mathbb{C} = \mathbb{B} \cdot \mathbb{C} \times \mathbb{A} = \mathbb{C} \cdot \mathbb{A} \times \mathbb{B}$.

Problema 14.

Hallar la derivada direccional de $V = 4xz^3 - 3x^2y^2z$ en el punto $(2, -1, 2)$ en la dirección $2\vec{a}_x - 3\vec{a}_y + 6\vec{a}_z$

Problema 15.

¿Para qué valores de a son $\mathbb{A} = a\vec{a}_x - 2\vec{a}_y + \vec{a}_z$ y $\mathbb{B} = 2a\vec{a}_x + a\vec{a}_y - 4\vec{a}_z$ perpendiculares?

Problema 16.

Si $\mathbb{A} = 2\vec{a}_x + \vec{a}_y - 3\vec{a}_z$ y $\mathbb{B} = \vec{a}_x - 2\vec{a}_y + \vec{a}_z$, hallar un vector de magnitud 5 y perpendicular a la vez a $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$.

Problema 17.

Hallar el vector área del triángulo que tiene por vértices $(3, 5, 2)$, $(1, -1, 6)$, y $(-2, 1, 4)$.

Problema 18.

Hallar el volumen del paralelepípedo cuyas aristas son: $\mathbb{A} = 2\vec{a}_x - 3\vec{a}_y + 4\vec{a}_z$, $\mathbb{B} = \vec{a}_x + 2\vec{a}_y - \vec{a}_z$ y $\mathbb{C} = 3\vec{a}_x - \vec{a}_y + 2\vec{a}_z$.

Problema 19.

Hallar:

- el gradiente de $V = bcx + acy + abz - abc = 0$
- la derivada direccional de V en la dirección del vector unitario $\frac{3\vec{a}_x + 4\vec{a}_y + 5\vec{a}_z}{5\sqrt{2}}$ en el punto $(2, 3, 1)$.

Problema 20.

Hallar la derivada direccional en $(1, 3, -2)$ en la dirección de $\mathbb{A} = -\vec{a}_x + 2\vec{a}_y + 2\vec{a}_z$, si:

- $V = xy + xz + yz$
- $V = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
- $V = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- $V = x^2 + 2y^2 + 3z^2$
- $V = xy + (xy)^3$

Problema 21.

Hallar el vector unitario normal a la superficie $x^2 + y^2 - z = 6$ en el punto $(2, 3, 7)$.

Problema 22.

Demostrar que:

- a. $\nabla \cdot \vec{r} = 3$
- b. $\nabla \times \vec{r} = 0$
- c. $\nabla (\mathbb{A} \cdot \vec{r}) = \mathbb{A}$, si $\vec{r} = x\vec{a}_x + y\vec{a}_y + z\vec{a}_z$ y $\mathbb{A}$ es constante.

Problema 23.

Demostrar que:

- a. $\nabla \cdot V\mathbb{F} = V\nabla \cdot \mathbb{F} + \nabla V \cdot \mathbb{F}$
- b. $\nabla \times V\mathbb{F} = V\nabla \times \mathbb{F} + \nabla V \times \mathbb{F}$
- c. $\nabla \cdot \mathbb{E} \times \mathbb{F} = \mathbb{F} \cdot \nabla \times \mathbb{E} - \mathbb{E} \cdot \nabla \times \mathbb{F}$
- d. $\int_{\tau} \nabla U d\tau = \oint_S U d\mathbb{S}$
- e. $\int_{\tau} \nabla \times \mathbb{F} d\tau = - \oint_S \mathbb{F} \times d\mathbb{S}$

Problema 24.

Un campo vectorial está definido por $\mathbb{A} = f(r) \vec{r}$ demostrar que:

- a. $f(r) = \frac{k}{r^3}$ si $\nabla \cdot \mathbb{A} = 0$
- b. Siempre $\nabla \times \mathbb{A} = 0$.

Problema 25.

Dado $\mathbb{A} = A_x \vec{a}_x$ y $\nabla \cdot \mathbb{A} = x + y$, hallar la solución general para $\mathbb{A}$.

Problema 26.

¿Es correcto afirmar que $\nabla \cdot \left(\frac{\mathbb{A} \times \vec{r}}{r^3} \right) = 0$ si $\mathbb{A}$ es constante?.

Problema 27.

Si $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = 0$, $A_x = B_x = 0$, $A = x^2 + y^2$ y $B = 2A$, evaluar $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ en $(3, 5, 4)$.

Problema 28.

Demostrar que: $\oint_C (x\vec{a}_x + x\vec{a}_y - y\vec{a}_z) \cdot \vec{d\ell} = \int_S dS$, si C es una circunferencia de diámetro 1, centrada en el origen en el plano xy y S es el área circular rodeada por C .

Problema 29.

Evaluar ambos miembros del teorema de la divergencia para el campo $\mathbb{F} = 2r^2\vec{a}_r$, si los volúmenes son:

- $r = 3$ en coordenadas esféricas.
- $r = 3, 0 \leq z \leq 2$ en coordenadas cilíndricas.

Problema 30.

Evaluar ambos miembros del teorema del rotacional para el campo $\mathbb{F} = x^2\vec{a}_x + xy^2\vec{a}_y$ alrededor de la trayectoria $r = a$.

Problema 31.

Si $\mathbb{A} = x^2\vec{a}_x + (xy)^2\vec{a}_y + 24x^2y^2z^3$ evaluar ambos miembros del teorema de Gauss para un cubo unitario centrado en el origen.

Problema 32.

Dibujar $\mathbb{F} = x\vec{a}_x + y\vec{a}_y$ el campo vectorial. Clasificar el campo e interpretar el resultado. Obtener las líneas de campo, las líneas de nivel y la respectiva función a partir de la cual se puede obtener el campo vectorial.

Problema 33.

Determinar si $\mathbb{F} = (2xy + z^3)\vec{a}_x + x^2\vec{a}_y + 3xz^2\vec{a}_z$ es un campo conservativo. Si lo es, determinar la respectiva función a partir de la cual se puede obtener el campo vectorial y el trabajo que debe realizarse para mover un objeto en este campo de $(1, -2, 1)$ a $(3, 1, 4)$.

Problema 34.

Demostrar que el campo $\mathbb{F} = xz\vec{a}_x - yz\vec{a}_y + y\vec{a}_z$ es solenoidal. Determinar la función a partir de la cual se puede obtener el campo vectorial. Suponer $A_z = 0$.

Problema 35.

Si $\mathbb{F} = 18z\vec{a}_x - 12\vec{a}_y + 3y\vec{a}_z$, evaluar ambos miembros del teorema de Gauss para la región limitada por $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $2x + 3y + 6z = 12$.

Problema 36.

Hallar $P_6(u)$ y $P_7(u)$ mediante la fórmula de recurrencia y la fórmula de Rodrigues. Escribir un programa en MatLab que dibuje ambos polinomios en la misma gráfica.

3

CAPÍTULO TRES

CAMPO ELECTROSTÁTICO EN EL ESPACIO LIBRE.

3.1. Ley de la electrostática.

Dos cuerpos cargados con la misma naturaleza de electricidad se repelen y si son de naturaleza diferente se atraen. La propiedad eléctrica da lugar a una interacción más fuerte que la gravitacional.

La carga eléctrica está cuantizada, o sea, existe en forma de paquetes pequeños. Todas las cargas que existen en la naturaleza son múltiplos de la carga fundamental e . La carga del electrón es $1,6 \times 10^{-19}[C]$. La masa está también cuantizada. La carga eléctrica se conserva: principio de conservación de la carga, la masa no.

Se ha calculado que la masa del protón es aproximadamente igual a la del neutrón y éstas 1840 veces mayores que la del electrón, o sea, casi toda la masa del átomo está concentrada en el núcleo. Una kilomol de hidrógeno monoatómico consta de $6,02 \times 10^{26}[\text{átomos}]$ y su masa es $1,008[Kg]$, entonces la masa de un átomo de hidrógeno es:

$$m_H = m_P = \frac{1,008}{6,02 \times 10^{26}} = 1,67 \times 10^{-27}[Kg]$$
$$m_e = \frac{m_P}{1840} = \frac{1,67 \times 10^{-27}}{1840} = 9,11 \times 10^{-31}[Kg]$$

3.1.1. Ley de Coulomb y campo electrostático.

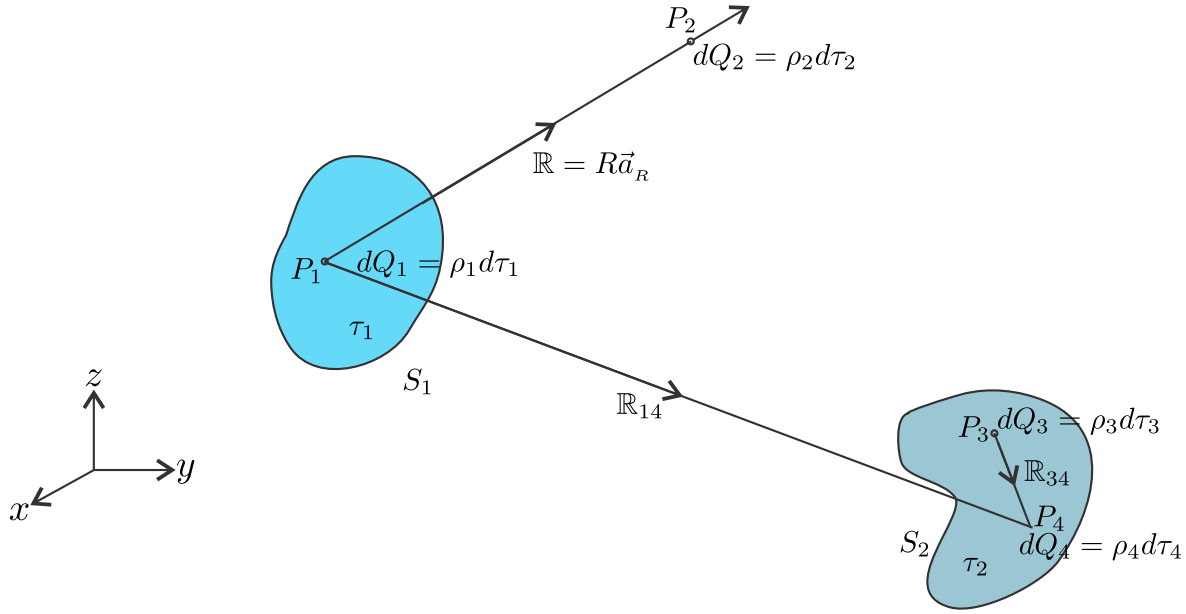


Figura 3.1 Ley de Coulomb.

Si las propiedades de las cargas se conservan al analizarlas desde el punto de vista matemático, la ley de Coulomb en función de las cargas infinitesimales, toma la siguiente forma:

$$d\mathbb{F}_{21} = \frac{dQ_1 dQ_2}{4\pi\epsilon_o R^3} \mathbb{R} [Nw] \quad (3.1)$$

$$d\mathbb{F}_{21} = \frac{dQ_1 dQ_2}{4\pi\epsilon_o R^2} \vec{a}_R [Nw] \quad (3.2)$$

- $d\mathbb{F}_{21}$: elemento de fuerza que se ejerce sobre dQ_2 debido a dQ_1 . [Nw].
- dQ_i : elementos de carga que contienen información sobre la magnitud y naturaleza de las cargas situadas en P_i . [C].
- $\mathbb{R}$: vector que va desde el elemento de carga dQ_1 al elemento de carga dQ_2 [m].
- $\vec{a}_R$: vector unitario en la dirección de $\mathbb{R}$.

- ε_o : permitividad del espacio libre. $\left[\frac{F}{m}\right]$

La fuerza elemental es un diferencial que depende de la existencia de dQ_1 conocida como fuente, manantial o causa y de dQ_2 conocida como la carga de prueba, testigo, efecto o exploradora, la cual por convención es mayor que cero y suficientemente pequeña con el fin de disminuir la influencia de ésta sobre las cargas que crean el campo que se va a investigar. Este requisito no tiene nada que ver con el principio de superposición que sigue siendo válido para cualquier valor de la carga testigo.

Para el caso de una carga distribuida se definen las siguientes densidades de carga:

- $\rho \triangleq \frac{dQ}{d\tau}$: densidad de carga volumétrica. $\left[\frac{C}{m^3}\right]$.
- $\sigma \triangleq \frac{dQ}{dS}$: densidad de carga superficial. $\left[\frac{C}{m^2}\right]$.
- $\lambda \triangleq \frac{dQ}{d\ell}$: densidad de carga longitudinal. $\left[\frac{C}{m}\right]$.

La ley de Coulomb es válida con una precisión muy elevada para $10^{-17} \leq r \leq 10^7[m]$ y lógicamente para distancias mayores a $10^7[m]$. Para verificar la validez de ésta, se tienen en cuenta las propiedades ondulatorias de las partículas, en otras palabras, es necesario acudir a la mecánica cuántica.

El concepto de acción a distancia involucra la interacción entre cuerpos cargados que transmiten fuerzas a través del espacio sin intermediarios. Este concepto lo introdujo Faraday en varios de sus trabajos. Simultáneamente, aparece el campo como intermediario para efectuar la interacción. Inicialmente, ésta se había adjudicado al medio que ocupa el espacio. Maxwell quiso interpretar las fuerzas de interacción electromagnética como mecánicas. Para ello atribuyó al medio propiedades mediante los vectores campo eléctrico, desplazamiento eléctrico, intensidad de campo magnético e inducción magnética, a las cuales no dio interpretación mecánica pero tampoco la descartó. Más tarde se concluyó que las interacciones magnéticas no se pueden interpretar mecánicamente. El resultado final fue que el campo existe en el tiempo y en el espacio y es una forma de materia que posee propiedades diferentes para cada clase de campo.

Si en la Ec.(3.1), se efectúa la integral sobre el volumen de la fuente se obtiene:

$$d\mathbb{F}_{21} = \frac{dQ_2}{4\pi\varepsilon_o} \int_{\tau} \frac{dQ_1}{R^3} \mathbb{R} \quad (3.3)$$

se define:

$$\mathbb{E}_{21} \triangleq \frac{d\mathbb{F}_{21}}{dQ_2} \quad (3.4)$$

$\mathbb{E}_{21}$: campo eléctrico que actúa en el punto P_2 debido a la distribución de carga en la fuente. $\left[\frac{N}{C}\right]$. Así:

$$\mathbb{E}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int \frac{dQ_1}{R^3} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int \frac{dQ}{R^3} \mathbb{R} \quad (3.5)$$

Para generalizar, en la Ec.(3.5) se han omitido los subíndices, ya que las distribuciones de carga se consideran fuentes del campo electrostático y éste actúa sobre cada punto del espacio.

Ya que:

$$dQ \Leftrightarrow \rho d\tau \Leftrightarrow \sigma dS \Leftrightarrow \lambda d\ell \quad (3.6)$$

La doble flecha significa que las distribuciones de carga se pueden intercambiar. O sea la Ec.(3.5) se escribe de tres formas diferentes utilizando la Ec.(3.6):

$$\mathbb{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{\tau} \frac{\rho d\tau}{R^3} \mathbb{R} \quad \mathbb{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_S \frac{\sigma dS}{R^3} \mathbb{R} \quad \mathbb{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_C \frac{\lambda d\ell}{R^3} \mathbb{R} \quad (3.7)$$

La restricción de que el punto del campo no se encuentre en el interior de la distribución de carga es innecesaria. Se consideran dos distribuciones de carga dQ_1 y dQ_3 y el punto P_4 en el volumen τ_3 como se indica en la Fig. 3.1.

- $dQ_1 = \rho_1 d\tau_1$: elemento de carga que contribuye al campo en el punto P_4 .
- $dQ_3 = \rho_3 d\tau_3$: elemento de carga que contribuye al campo en el punto P_4 .

Se rodea el punto P_4 por un volumen infinitesimal y libre de carga. Éste, no altera el volumen τ_3 en el límite. El campo electrostático total en el punto P_4 es:

$$\mathbb{E}_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{\tau_1} \frac{dQ_1}{R_{14}^3} \mathbb{R}_{14} + \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{\tau_3} \frac{dQ_3}{R_{34}^3} \mathbb{R}_{34}$$

$$\mathbb{E}_i = \sum_{j=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{\tau_j} \frac{\rho_j d\tau_j}{R_{ij}^3} \mathbb{R}_{ij} \quad (3.8)$$

La integración es un proceso de suma, Ec.(3.8) se expresa de una manera más concisa:

$$\mathbb{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{\tau} \frac{\rho d\tau}{R^3} \mathbb{R} \quad (3.9)$$

La Ec.(3.9) es una expresión más general para el campo electrostático debida a varias distribuciones de carga. Es una integración vectorial y no existe un proceso formal para llevar a cabo ésta. El límite sobre la integral indica que se incluye todo el espacio. En la práctica, el proceso de integración se implementa sólo en las regiones donde existe distribución de carga, ya que el integrando se anula en las regiones donde no hay distribución de carga.

Es necesario expresar el integrando en componentes de un sistema de coordenadas apropiado y el resultado en uno o más escalares convencionales. Esta es una manera de enunciar el principio de superposición. En la Ec.(3.8) el punto i permanece fijo durante la integración y las coordenadas de la distribución de carga o de la fuente se remplazan por las dimensiones geométricas de las fuentes que llegan a ser parámetros de la solución. El principio de superposición se observa hasta intensidades de campos muy elevadas (electrotecnia, aceleradores, descargas de alta tensión) y se nota con gran precisión a intensidades de los campos atómicos, en las superficies de los núcleos pesados, donde se alcanzan valores enormes del campo eléctrico, aproximadamente del orden de $10^{22} \left[\frac{V}{m} \right]$. Sin embargo, se pone al descubierto otro efecto: para $10^{20} \left[\frac{V}{m} \right]$ surge la polarización del espacio libre al aparecer la pareja electrón - positrón, lo que conduce a la no linealidad cuántica de interacción.

3.2. Potencial electrostático.

En general para una distribución de carga, el campo electrostático en cualquier punto P se obtiene a partir de la Ec.(3.9) y se tiene en cuenta la Ec.(2.43) de la Unidad II, entonces al remplazar este valor en aquélla, se obtiene:

$$\mathbb{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{\tau} dQ \left(\frac{\mathbb{R}}{R^3} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{\tau} dQ \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \quad (3.10)$$

En la Ec.(3.10), la jerarquía de las operaciones establece que se deriva primero y en

segundo lugar se integra. Si se invierte el procedimiento el resultado es equivalente y la Ec.(3.10) se reescribe así:

$$\mathbb{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o} \nabla \int_{\tau} \frac{dQ}{R} = -\nabla \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{\tau} \frac{dQ}{R} \right] \quad (3.11)$$

Se define el potencial electrostático V , así:

$$V \triangleq \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int \frac{dQ}{R} + C \quad (3.12)$$

La constante C en la Ec.(3.12), se debe al carácter indefinido de la integral. Por lo tanto, la Ec.(3.11) se reescribe como:

$$\mathbb{E} = -\nabla V \quad (3.13)$$

La Ec.(3.13), expresa que el campo electrostático se obtiene a partir del gradiente negativo de una función potencial escalar V , llamada el potencial electrostático, el cual se puede expresar para diferentes distribuciones de carga, de acuerdo a la Ec.(3.6):

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{\tau} \frac{\rho d\tau}{R} [V] \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_S \frac{\sigma dS}{R} [V] \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_C \frac{\lambda d\ell}{R} [V] \quad (3.14)$$

3.3. Teorema de Helmholtz.

3.3.1. Rotacional del campo electrostático o teorema de Stokes.

Si se toma el rotacional a ambos miembros de la Ec.(3.13), se tiene:

$$\nabla \times \mathbb{E} = -\nabla \times \nabla V \quad \therefore \quad \nabla \times \mathbb{E} = 0 \quad (3.15)$$

El campo electrostático es irrotacional, laminar o conservativo. Si la Ec.(3.15) se integra a través de una superficie S abierta limitada por la trayectoria C , se tiene:

$$\int_S \nabla \times \mathbb{E} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (3.16)$$

El Teorema de Stokes establece que:

$$\oint_C \mathbb{E} \cdot \vec{d\ell} = 0 \quad (3.17)$$

La Ec.(3.17) indica que el trabajo que realiza un agente externo para llevar una carga a través de una trayectoria cerrada es nulo y que la diferencia de potencial entre dos puntos es independiente de la trayectoria que se siga para ir entre ellos. De la definición de gradiente:

$$dV = \nabla V \cdot \vec{d\ell} = -(-\nabla V) \cdot \vec{d\ell} \quad (3.18)$$

Si la Ec.(3.13) se reemplaza en la Ec.(3.18):

$$dV = -\mathbb{E} \cdot \vec{d\ell} \quad (3.19)$$

Si la Ec.(3.19) se integra entre los puntos P_1 y P_2 , se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{V_1}^{V_2} dV &= - \int_{P_1}^{P_2} \mathbb{E} \cdot \vec{d\ell} \quad \therefore V_2 - V_1 = - \int_{P_1}^{P_2} \mathbb{E} \cdot \vec{d\ell} \\ V_{21} &= \int_{P_2}^{P_1} \mathbb{E} \cdot \vec{d\ell} \end{aligned} \quad (3.20)$$

La Ec.(3.20) define la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera. Es necesario especificar un potencial cero de referencia, éste frecuentemente se asigna a un punto muy alejado. En la práctica, el potencial cero se adjudica a la superficie terrestre, así, en Ingeniería Eléctrica al punto de referencia se le llama “tierra”. Cuando un sistema se conecta a este punto se dice que se “aterrija”. La unidad de diferencia de potencial es el Voltio. Por lo tanto:

$$V_{21} = \int_{P_2}^{\infty} \mathbb{E} \cdot \vec{d\ell} \quad (3.21)$$

La Ec.(3.21) define el potencial absoluto para el punto P_2 . Si el potencial de referencia se asigna en otro punto diferente al enunciado antes, el potencial se denomina relativo.

3.3.2. Divergencia del campo electrostático o teorema de Gauss.

Si a ambos miembros de la Ec.(3.13) se les toma la divergencia, se tiene:

$$\nabla \cdot \mathbb{E} = \nabla \cdot (-\nabla V) = -\nabla^2 V$$

Para cualesquier distribución de carga se satisface la Ec.(3.11), por lo tanto:

$$\nabla \cdot \mathbb{E} = \nabla \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int \frac{dQ}{R^3} \mathbb{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \nabla \cdot \int dQ \frac{\mathbb{R}}{R^3}$$

En la fuente:

$$\frac{\mathbb{R}}{R^3} = \frac{\vec{a}_R}{R^2} \quad y \quad dQ = \rho d\tau$$

$$\nabla \cdot \mathbb{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{\tau} \nabla \cdot \frac{\mathbb{R}}{R^3} \rho d\tau \quad (3.22)$$

Sobre el elemento de volumen que rodea al punto P , la densidad de carga volumétrica permanece constante. Si se aplica el Teorema de Gauss al segundo miembro de la ecuación anterior, se obtiene:

$$\nabla \cdot \mathbb{E} = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_o} \oint_S \frac{\mathbb{R}}{R^3} \cdot d\mathbb{S}$$

La integral define el ángulo sólido y el valor 4π , por lo tanto:

$$\nabla \cdot \mathbb{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o} \quad (3.23)$$

Las Ecs.(3.15) y (3.23) definen completamente el campo electrostático y la interpretación física es la siguiente:

- $\nabla \times \mathbb{E} = 0$ Las líneas de gradiente o de campo no se arremolinan alrededor de la fuente.
- $\nabla \cdot \mathbb{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o}$ Las líneas de gradiente o de campo comienzan en una carga positiva y terminan en una negativa. Este hecho muestra que el campo electrostático es irrotacional, laminar, conservativo o de clase II.

Si la Ec.(3.23) se integra a través de un volumen τ limitado por una superficie S , se tiene:

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \mathbb{E} d\tau = \frac{1}{\varepsilon_o} \int_{\tau} \rho d\tau \quad (3.24)$$

Si al primer miembro de la Ec.(3.24) se aplica el Teorema de Gauss, se tiene:

$$\oint_S \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = \frac{1}{\varepsilon_o} \int_{\tau} \rho d\tau = \frac{Q_{enc.}}{\varepsilon_o} \quad (3.25)$$

Las Ecs.(3.23) y (3.25) se denominan ley de Gauss, en forma diferencial e integral respectivamente y conforman una ecuación fundamental del electromagnetismo o de Maxwell. La formulación diferencial se utiliza para interpretar cómo es físicamente el campo electrostático, mientras que la integral se utiliza para realizar cálculos numéricos cuando el sistema ofrece simetría.

3.3.3. Ecuaciones de Poisson y Laplace.

Si se reemplaza la Ec.(3.13) en la Ec.(3.23), se obtiene:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_o} \quad (3.26)$$

La Ec.(3.26) se denomina ecuación de Poisson y se emplea en una región donde existe una distribución de carga volumétrica. En una región libre de cargas, $\rho = 0$ se convierte en:

$$\nabla^2 V = 0 \quad (3.27)$$

La Ec.(3.27), se denomina ecuación de Laplace.

3.4. Clasificación de los materiales.

Desde el punto de vista de la electricidad los materiales se clasifican en:

3.4.1. Conductores.

Permiten el paso de la corriente eléctrica. La carga eléctrica se encuentra sobre la superficie conductora. Ejemplos: el cobre y los metales tienen electrones libres, los

que se encuentran alejados del núcleo; el cuerpo humano; la sal, la cual se ioniza; la tierra, etc.

3.4.2. Aislantes.

Permiten el paso de una corriente de conducción despreciable, por tener pocos electrones libres. Ejemplos: la porcelana, el vidrio, los plásticos, la madera seca, el papel, etc.

3.4.3. Semiconductores.

Tienen propiedades intermedias entre conductores y aislantes. Su comportamiento se modifica al adicionarles otros materiales llamados dopantes. Su aplicación es tema de Electrónica. Ejemplos: el silicio y el germanio.

3.5. Conductores.

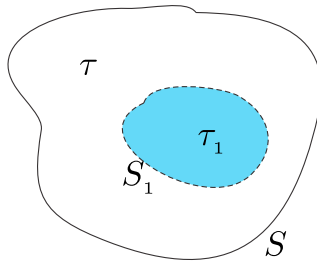


Figura 3.2 Cálculo del campo electrostático en el interior de un conductor.

En un conductor existen electrones libres, los que se pueden desplazar en el interior del material sin abandonar su superficie. Si un conductor se introduce en un campo eléctrico uniforme, en el interior de aquél aparecerá una corriente electrónica transitoria, la cual desaparecerá una vez se hayan redistribuido las cargas libres en la superficie, de modo que produzcan un campo eléctrico nulo en cualquier punto en el interior del conductor o se descargue la fuente que produjo el campo uniforme. Ya que en el interior del conductor el campo eléctrico es nulo:

$$dV = -\mathbb{E} \cdot \vec{d\ell} = 0 \quad \therefore \quad V = C \quad (3.28)$$

La Ec.(3.28) expresa que el conductor es un volumen equipotencial y su superficie una equipotencial. El campo eléctrico puede obtenerse a partir del gradiente negativo de la función potencial escalar o potencial eléctrico:

$$\mathbf{E} = -\nabla V = 0 \quad (3.29)$$

Si se halla el flujo neto del campo eléctrico de la Ec.(3.29) en el interior del conductor a través de la superficie cerrada que limita el volumen τ_1 como se indica en la Fig. 3.2, se tiene:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (3.30)$$

La Ec.(3.30), significa que un conductor no tiene carga neta en su interior y por lo tanto cualquier exceso de carga para efectos prácticos reside en su superficie. Si se es estricto, el exceso de carga en un conductor se encuentra en promedio, hasta una distancia de la superficie del orden de una o dos veces el diámetro atómico, según Feynman. Para mantener un conductor a un potencial constante se aterriza, así cualquier cambio eléctrico externo no produce efecto en el interior y viceversa. Esta propiedad se utiliza en instrumentos eléctricos delicados cuyas partes esenciales se encierran en una caja metálica para que no reciban la influencia de campos eléctricos próximos. Esta propiedad se conoce con el nombre de “blindaje” o “apantallamiento eléctrico”.

3.6. Condiciones de frontera.

3.6.1. Componente normal.

En la Fig.3.3, en la superficie de separación, frontera, límite, borde, o entrecara entre un conductor y el espacio libre se considera una pequeña parte de ella con el fin de que el campo eléctrico sea uniforme allí y se hace coincidir una superficie gaussiana en forma de moneda con caras paralelas a la superficie conductora, una en el interior y otra fuera de ésta: ningún flujo atraviesa las superficies ΔS_1 y ΔS_3 ya que el campo es nulo dentro del conductor y no existe componente del campo eléctrico a lo largo de la superficie conductora, respectivamente; la existencia de ésta implicaría movimiento de carga a través de ella, lo cual es contrario al supuesto de que se están considerando cargas en reposo, sólo existe flujo a través de ΔS_2

y el campo eléctrico en ésta es normal al conductor y éste se comporta como una superficie equipotencial. De la Fig.3.3:

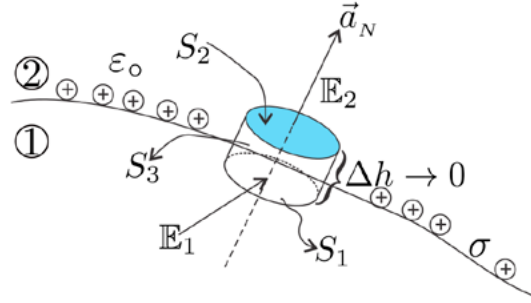


Figura 3.3 Aplicación de la ley de Gauss para hallar el campo eléctrico en el exterior de un conductor.

$$\oint_S \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = \sum_1^3 \int_{\Delta S_i} \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = \frac{Q_{enc.}}{\epsilon_o}$$

$$E_2 \vec{a}_N \cdot \Delta S_2 \vec{a}_N = \frac{\sigma \Delta S_2}{\epsilon_o} \quad \therefore \quad E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_o}$$

$$\mathbb{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_o} \vec{a}_N \quad (3.31)$$

Puede ocurrir que en alguno o algunos puntos en particular de la superficie conductora, la componente normal sea cero, pero de cualquier modo es la única que es diferente de cero en la superficie. La Ec.(3.31) expresa que el campo eléctrico en el exterior próximo a la superficie conductora es normal a ella y se comporta como una equipotencial. Sin embargo, una superficie equipotencial no es necesariamente conductora. Esta ecuación indica que el campo eléctrico es más intenso en aquellos sitios donde el radio de curvatura es pequeño y convexo. Esta propiedad se conoce con el nombre de “poder de las puntas” y tiene aplicación en el pararrayos. Un conductor perfecto tiene una conductividad muy grande o sea una resistencia nula y no se opone al paso de la corriente. Tales conductores, llamados superconductores se obtienen a temperaturas cercanas al cero absoluto. A temperatura ambiente, aproximadamente, los metales se consideran perfectos.

3.6.2. Componente tangencial.

En la Fig.3.4, en la frontera entre un conductor (medio 1) y el espacio libre (medio 2) se considera la trayectoria cerrada 1, 2, 3, 4, 1, $\vec{d\ell}$ un elemento de longitud

tangente a la trayectoria y se utiliza el hecho de que la circulación del campo electrostático es cero:

$$\oint_C \mathbb{E} \cdot d\vec{\ell} = \sum_I^{IV} \int_C \mathbb{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

$$\int_1^2 \mathbb{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_2^3 \mathbb{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_3^4 \mathbb{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_4^1 \mathbb{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

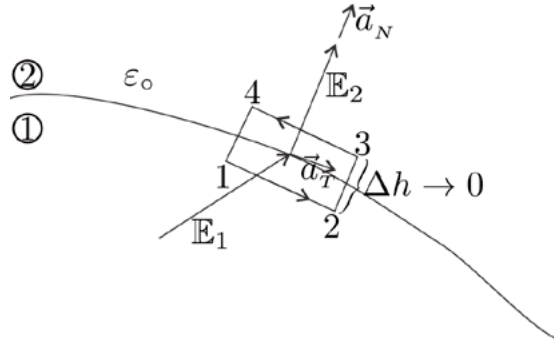


Figura 3.4 Componente tangencial del campo eléctrico en un conductor.

$$\begin{aligned} \int_1^2 \mathbb{E}_1 \cdot d\vec{\ell} &= 0 & \text{ya que } \mathbb{E}_1 &= 0 \\ \int_2^3 \mathbb{E} \cdot d\vec{\ell} &= 0 & \text{ya que } \Delta h &\rightarrow 0 \\ \int_3^4 \mathbb{E}_2 \cdot d\vec{\ell} &= 0 & \text{ya que } \mathbb{E}_2 &\perp d\vec{\ell} \\ \int_4^1 \mathbb{E} \cdot d\vec{\ell} &= 0 & \text{ya que } \Delta h &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{E}_{1T} = \mathbb{E}_{2T} \quad (3.32)$$

En resumen, en condiciones estáticas:

1. La intensidad del campo electrostático en el interior de un conductor es cero.
2. La intensidad del campo electrostático es normal a la superficie conductora.
3. La superficie conductora es una equipotencial.
4. La componente tangencial del campo electrostático en el interior y exterior del conductor es nula.

5. El potencial en el interior del conductor es el mismo de la superficie.

3.7. Campo en la cavidad de un conductor.

3.7.1. Cavidad sin carga.

En la Fig.3.5, se muestra un conductor que tiene una cavidad vacía, limitado por dos superficies: S_1 la externa y la interna S_2 , y S_c es una gaussiana que no encierra carga, ya que en la cavidad la carga es cero.

$$\oint_S \mathbb{E} \cdot dS = \frac{Q_{enc.}}{\varepsilon_o} = 0 \quad (3.33)$$

En el equilibrio electrostático se sabe que el campo eléctrico en el interior de un conductor es cero y por lo tanto no existe carga neta en el interior de él, cualquier carga que se coloque en su interior inmediatamente comienza a desplazarse hacia la superficie, en este caso hacia S_1 .

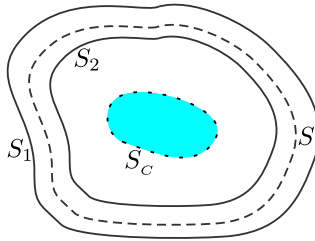


Figura 3.5 Cálculo del campo eléctrico en una cavidad vacía.

La gaussiana S_c no encierra carga, esto no quiere decir que el campo en la cavidad sea cero. Del teorema de Gauss se concluye que el flujo del campo eléctrico es cero, pero el campo eléctrico no. Del teorema no se deduce que el campo en la cavidad sea cero. Para determinar el campo en la cavidad se evalúa la integral de línea cerrada o su circulación:

$$\oint_C \mathbb{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \mathbb{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_B^A \mathbb{E} \cdot d\vec{\ell}$$

La circulación del campo eléctrico establece que, es cero porque:

- a. $\mathbb{E} = 0$ en el interior del conductor.

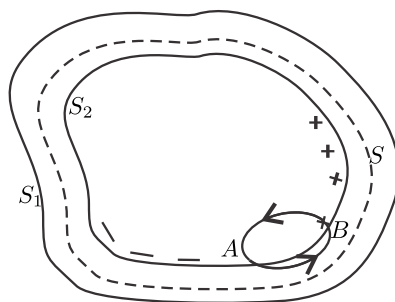


Figura 3.6 Conductor que tiene en su interior una cavidad vacía.

- b. el campo eléctrico es perpendicular al elemento de longitud en toda la trayectoria
- c. el producto punto unas veces es mayor que cero y otras veces menor.
- d. $dQ = \sigma dS = 0$ en la superficie $S_2 \rightarrow \sigma = 0$

3.7.2. Cavidad con carga.

Si existe carga en el interior de la cavidad:

$$\oint_S \mathbb{E} \cdot dS = \frac{Q_{enc.}}{\varepsilon_o} = \frac{Q + Q_2}{\varepsilon_o} = 0 \quad Q_2 = -Q \quad (3.34)$$

Q_2 : carga inducida en la superficie S_2 del conductor.

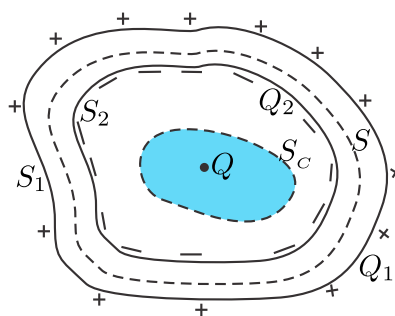


Figura 3.7 Carga en la cavidad de un conductor.

Para que la carga encerrada por la superficie gaussiana S sea nula, debe existir una carga de igual magnitud y naturaleza opuesta a Q en algún lugar de S .

El principio de conservación de la carga establece que, si la carga del conductor es cero antes de colocar la carga Q en la cavidad, este valor se conserva después de colocarla. Así:

$$Q_1 + Q_2 = 0 \quad \therefore \quad Q_1 = -Q_2 = Q \quad (3.35)$$

donde Q_1 y Q_2 son las cargas inducidas sobre las superficies S_1 y S_2 correspondiente a las superficies externa e interna del conductor, como se muestra en la Fig.3.7. La carga en un conductor se localiza en su superficie. Por lo tanto, una carga inducida $+Q$ aparecerá en la superficie exterior y una $-Q$ en la interior. Se nota que las cargas están ligeramente separadas de las superficies.

Así, una carga en el interior de la cavidad hace sentir su presencia en el exterior del conductor por medio de la carga Q_1 inducida sobre la superficie externa y el campo eléctrico debido a ésta.

Si $Q = 0$, de acuerdo a la Ec.(3.34) la carga en la superficie interior será también cero. Q_1 será cero si el conductor inicialmente estaba descargado y se mantiene descargado. Si no existe carga en el interior de la cavidad de un conductor, el campo eléctrico será cero en la cavidad y ésta será un volumen equipotencial y el potencial será el mismo del conductor.

3.8. Conductor descargado en presencia de un campo eléctrico externo.

Las cargas libres en el conductor se desplazan hacia uno y otro lado de él, de acuerdo a la orientación del campo, de modo que el campo en el interior sea cero en el equilibrio electrostático. Las líneas de campo llegan a la superficie ortogonalmente, donde el conductor se comporta como un sumidero y se alejan del mismo modo del otro lado donde se comporta como una fuente, estableciendo de este modo un flujo neto igual a cero, ya que el número de líneas de campo que llegan a él es igual al número de líneas de campo que salen de él.

3.8.1. Apantallamiento.

El fundamento para el apantallamiento es precisamente que el campo en el interior de un conductor sea cero. Situación válida, también, para campos cuasiestaciona-

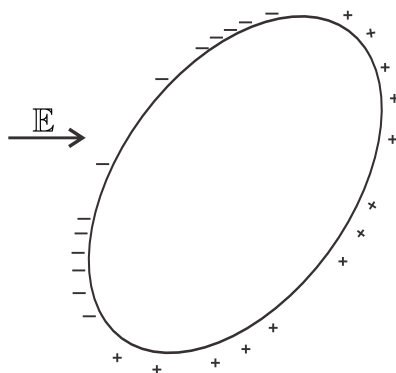


Figura 3.8 Conductor en presencia de un campo.

rios.

Si el conductor tiene una cavidad, para mantener independiente al campo de cualquier variación en ella se conecta a una fuente de potencial constante V_o .

$V_o = - \int_{\infty}^{cond} \mathbb{E} \cdot d\vec{\ell}$, en la expresión se nota que para que $\mathbb{E}$ sea constante es necesario conectar el conductor a una fuente V_o ; si se quiere que $\mathbb{E} = 0$ el conductor se debe aterrizar, o sea conectar a una fuente de potencial cero, en este caso la tierra.

Ejemplo 1.

Se tiene una esfera conductora de radio a que tiene una carga Q . Obtener el potencial y el campo eléctrico en puntos interiores y exteriores de ella.

SOLUCIÓN.

$$r < a \quad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o a} \quad \mathbb{E} = 0$$

El potencial eléctrico en el interior de ella es el mismo de su superficie; el campo eléctrico en el interior de ella es cero, es la condición de equilibrio electrostático.

$$r > a \quad \mathbb{E} = E\vec{a}_r \quad d\mathbb{S} = dS\vec{a}_r$$

$$\oint_S \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = \frac{Q_{enc.}}{\epsilon_o} \quad \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = E4\pi r^2 \quad Q_{enc.} = Q \quad E4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_o}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o r^2} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o r^2} \vec{a}_r \quad dV = -\mathbb{E} \cdot d\vec{\ell}$$

$$dV = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_o r^2} \vec{a}_r \cdot dr\vec{a}_r = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \frac{dr}{r^2}$$

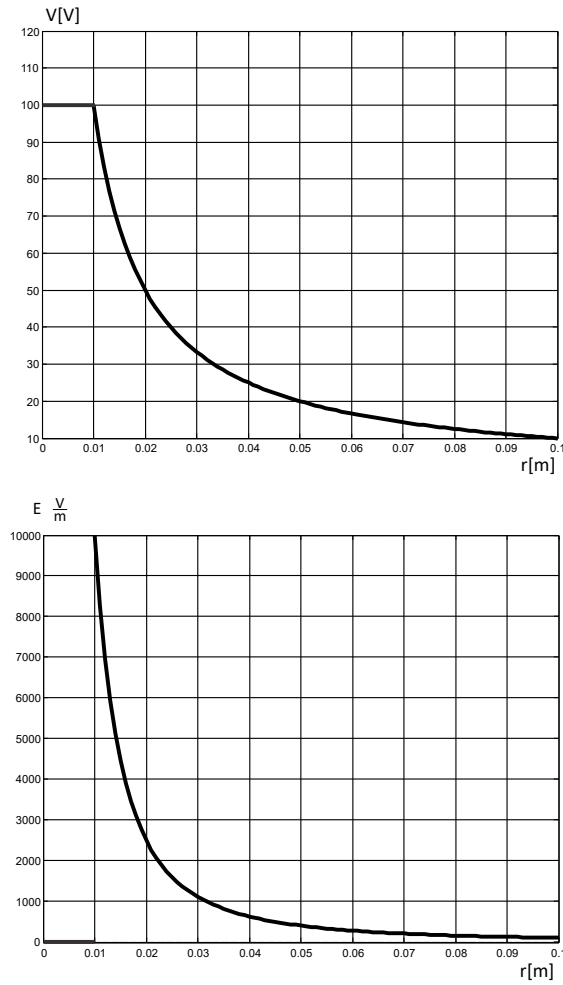


Figura 3.9 Potencial y campo electrostático en función de la distancia, producidos por una esfera conductora cargada de radio a .

$$\int_V^0 dV = - \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} \quad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Por lo tanto, en el exterior de la esfera:

$$r > a \quad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \mathbb{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{a}_r \quad \square$$

Ejemplo 2.

Una esfera conductora hueca de radio a tiene una carga en su superficie Q_a y en el centro de la cavidad una carga Q . Obtener el potencial y el campo eléctrico en el interior y fuera de ella.

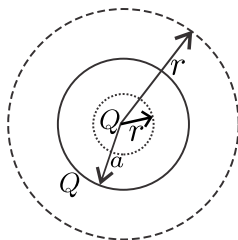
SOLUCIÓN.

Figura 3.10 Esfera conductora de radio a con una carga Q en el centro de la cavidad.

$$\text{a. } r > a \quad \mathbb{E} = E\vec{a}_r \quad d\mathbb{S} = dS\vec{a}_r \quad \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = EdS$$

$$\oint_S \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = \frac{Q_{enc.}}{\varepsilon_o} \quad Q_{enc.} = Q + Q_a \quad E4\pi r^2 = \frac{Q + Q_a}{\varepsilon_o}$$

$$E = \frac{Q + Q_a}{4\pi\varepsilon_o r^2} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{E} = \frac{Q + Q_a}{4\pi\varepsilon_o r^2} \vec{a}_r$$

$$dV = -\mathbb{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{Q + Q_a}{4\pi\varepsilon_o r^2} \vec{a}_r \cdot dr\vec{a}_r = -\frac{Q + Q_a}{4\pi\varepsilon_o} \frac{dr}{r^2}$$

$$\int_V^0 dV = -\int_r^\infty \frac{Q + Q_a}{4\pi\varepsilon_o} \frac{dr}{r^2} \quad V = \frac{Q + Q_a}{4\pi\varepsilon_o r}$$

Por lo tanto, en el exterior de la esfera:

$$r > a \quad V = \frac{Q + Q_a}{4\pi\varepsilon_o r} \quad \mathbb{E} = \frac{Q + Q_a}{4\pi\varepsilon_o r^2} \vec{a}_r \quad \square$$

$$\text{b. } r < a \quad \mathbb{E} = E\vec{a}_r \quad d\mathbb{S} = dS\vec{a}_r \quad \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = EdS$$

$$\oint_S \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = \frac{Q_{enc.}}{\varepsilon_o} \quad Q_{enc.} = Q \quad E4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2} \vec{a}_r$$

$$dV = -\mathbb{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2} \vec{a}_r \cdot dr\vec{a}_r = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o} \frac{dr}{r^2}$$

$$\int_V^{V_a} dV = -\int_r^a \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o} \frac{dr}{r^2} \quad V_a - V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right)$$

$$\text{Pero: } V_a = \frac{Q + Q_a}{4\pi\varepsilon_o a} \quad V = \frac{Q + Q_a}{4\pi\varepsilon_o a} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \left(\frac{Q}{r} + \frac{Q_a}{a} \right)$$

Por lo tanto, en el interior de la esfera:

$$r < a \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{Q}{r} + \frac{Q_a}{a} \right) \quad \mathbb{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o r^2} \vec{a}_r \quad \square$$

Ejemplo 3.

Una cáscara esférica conductora descargada de radios a y b , $b > a$ tiene una carga Q colocada en el centro de la cáscara. Analizar el campo eléctrico.

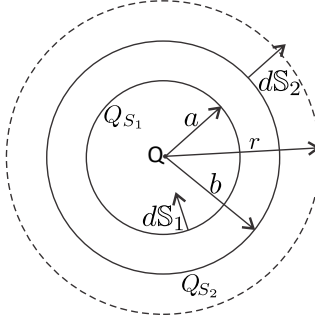


Figura 3.11 Cáscara conductora descargada con una carga Q en el centro de ella.

SOLUCIÓN.

a. $0 < r < a \quad \mathbb{E} = E\vec{a}_r \quad d\mathbb{S} = dS\vec{a}_r \quad \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = EdS$

$$\oint_S \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = \frac{Q_{enc.}}{\epsilon_o} \quad Q_{enc.} = Q \quad E4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_o}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o r^2} \rightarrow \mathbb{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o r^2} \vec{a}_r \quad (3.36)$$

La Ec.(3.36), expresa que en la cavidad existe un campo electrostático, que varía inversamente con la distancia cuadrática al centro de la cáscara.

b. $a < r < b \quad \oint_S \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = \frac{Q + Q_{S_1}}{\epsilon_o} = 0$

El campo en esta región es nulo, ya que ésta es conductora, por lo tanto:

$$Q_{S_1} = -Q \quad (3.37)$$

Q_{S_1} : carga inducida en la superficie .

La Ec.(3.37) significa que en la superficie S_1 de la cáscara se induce una carga $-Q$. Esto se explica mediante una redistribución de carga en la cáscara, una vez se coloca $+Q$ en el centro de la cáscara, con el fin de que el campo electrostático

sea nulo en esta región, o mediante la ley de la electrostática: la carga puntual $+Q$ atrae cargas de naturaleza diferente, las cuales al no poder abandonar la cáscara se distribuyen sobre la superficie S_1 y dejando S_2 con una carga $+Q$, de acuerdo con el principio de conservación de la carga .

$$c. \quad r > b \quad \oint_S \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = \frac{Q + Q_{S_1} + Q_{S_2}}{\varepsilon_o}$$

$Q_{S_1} + Q_{S_2} = 0$, ya que desde el exterior sólo se ve la carga $+Q$. Por lo tanto:

$$Q_{S_1} = -Q_{S_2} = -Q \quad (3.38)$$

La Ec.(3.38) indica que en la superficie S_2 se induce una carga de la misma magnitud pero de naturaleza diferente a la de la superficie S_1 , esto se explica al quedar aquélla con deficiencia de carga negativa.

3.9. Casos especiales de conductores.

3.9.1. Esfera conductora.

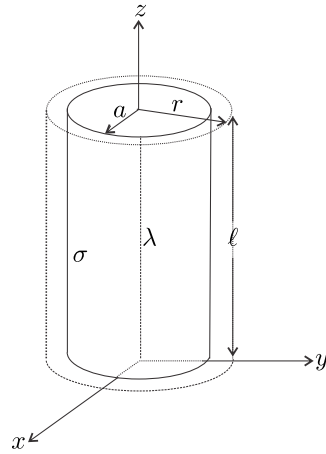
Para calcular el potencial o campo electrostático en una esfera conductora aislada con carga Q y radio a en puntos $r \geq a$, ésta se remplaza por una carga puntual Q situada en el centro de la esfera.

Las ecuaciones para el potencial y el campo electrostático en las diferentes regiones son:

$$V = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o a} & r \leq a \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r} & r \geq a \end{cases} \quad \mathbb{E} = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2} \vec{a}_r & r > a \end{cases} \quad \square$$

3.9.2. Cilindro conductor.

Para calcular el potencial o campo electrostático en un cilindro conductor aislado con carga Q y radio a en puntos donde $r \geq a$, éste se remplaza por una línea de carga que tiene una densidad longitudinal de carga constante ubicada en el eje del cilindro.

Figura 3.12 Cilindro conductor con carga Q .

La relación entre la densidad de carga superficial del cilindro y la densidad de carga longitudinal de la línea es:

$$Q = 2\pi a \ell \sigma = \lambda \ell \quad \lambda = 2\pi a \sigma$$

Las ecuaciones para el potencial y el campo electrostático en las diferentes regiones son:

$$V = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{1}{a} & r \leq a \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{1}{r} & r \geq a \end{cases} \quad \mathbb{E} = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o r} \vec{a}_r & r > a \end{cases} \quad \square$$

3.10. Sistemas de conductores.

El teorema de Gauss establece que el flujo neto del vector desplazamiento es equivalente a la carga encerrada por la superficie S que limita a un volumen τ , $\oint_S \mathbb{D} \cdot d\mathbb{S} = Q$.

En la Fig.3.13:

$$\sum_A^D Q_i = 0 \quad (3.39)$$

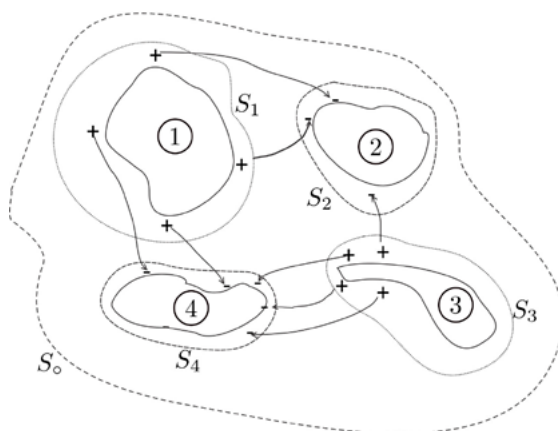


Figura 3.13 Conjunto de cuatro conductores separados eléctricamente.

la Ec.(3.39) expresa que los conductores están aislados de tierra. Los conductores que ocupan las posiciones 1 y 3 se comportan como fuentes o manantiales o cargas positivas, mientras que los conductores 2 y 4 son sumideros o vertederos o cargas negativas.

Se utilizan subíndices numéricos para indicar propiedades geométricas, por ejemplo: posición, superficies, volúmenes, distancias, etc.

Se utilizan subíndices literales para indicar propiedades eléctricas, por ejemplo: carga, densidades de carga, voltaje, corriente, flujo eléctrico, etc.

Dos conductores pueden tener líneas de flujo comunes, así φ_{ij} :

- El primer subíndice indica el conductor sobre el cual se ejerce influencia, recibe el nombre de *efecto*.
- El segundo subíndice indica el conductor que ejerce y se denomina *causa*.
- Si $i \neq j$ el flujo es mutuo, concatenado o enlazado entre los conductores ubicados en i y j .
- Si $i = j$ el flujo es propio, concatenado o enlazado por el conductor ubicado en la posición i debido a el mismo.
- Si $\varphi_{ij} > 0$ las líneas de flujo salen del conductor situado en la posición i y llegan al conductor ubicado en j .
- Si $\varphi_{ij} < 0$ las líneas de flujo entran al conductor situado en la posición i y salen del conductor ubicado en j .

- g. Si $\varphi > 0$ las líneas de flujo salen del conductor situado en la posición i y éste recibe el nombre de manantial, fuente o conductor cargado positivamente.
- h. Si $\varphi < 0$ las líneas de flujo entran al conductor situado en la posición i y éste recibe el nombre de sumidero, vertedero o conductor cargado negativamente.

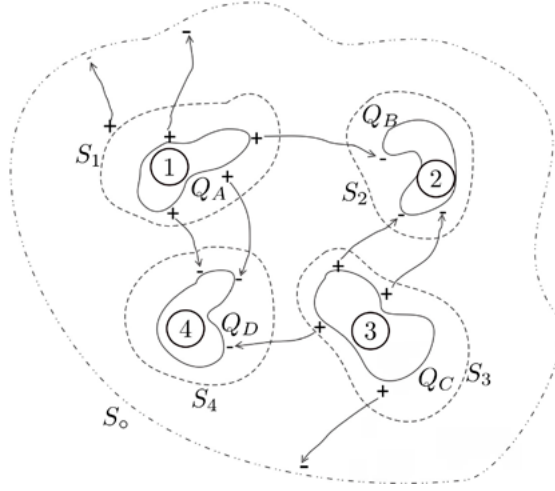


Figura 3.14 Sumidero en el infinito.

En la Fig.3.14 nótese bien que la suma de cargas sobre los conductores que constituyen el sistema es cero. De la misma, se tiene:

$$\begin{vmatrix} \varphi_{AA} & \varphi_{AB} & \varphi_{AC} & \varphi_{AD} \\ \varphi_{BA} & \varphi_{BB} & \varphi_{BC} & \varphi_{BD} \\ \varphi_{CA} & \varphi_{CB} & \varphi_{CC} & \varphi_{CD} \\ \varphi_{DA} & \varphi_{DB} & \varphi_{DC} & \varphi_{DD} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & -3 & -5 \end{vmatrix} \quad (3.40)$$

De la Ec.(3.40) se puede deducir:

$$\varphi_{ij} = -\varphi_{ji} \quad (3.41)$$

$$\varphi_{ii} = \varphi_{iA} + \varphi_{iB} + \varphi_{iC} + \cdots + \varphi_{ij} \quad (3.42)$$

Donde:

$$j = A, B, C, \dots N \quad i \neq j$$

En la Fig.3.14 $\sum_A^D Q_k \neq 0$ la suma de cargas en los conductores es diferente de cero. En este caso el infinito se representa por una superficie S_o , la cual encierra el sistema de conductores y en ella existe una carga de igual magnitud y naturaleza diferente al excedente de carga en los conductores encerrados por ella. En este caso:

$$\sum_A^D Q_k = +5 - 3 + 4 - 3 = +3$$

O sea, en S_o existe una carga -3 .

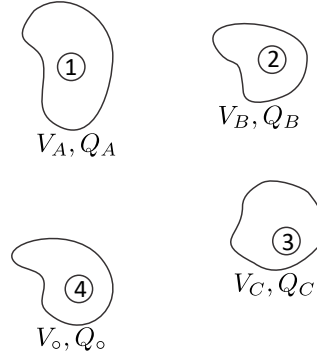


Figura 3.15 Sistema de tres conductores cargados y tierra.

Si en el infinito se ubica el conductor 0, entonces:

$$\sum_0^D Q_k = 0 \quad (3.43)$$

donde $k = 0, A, B, C$ y D .

De la Fig.3.14:

$$\begin{vmatrix} \varphi_{00} & \varphi_{0A} & \varphi_{0B} & \varphi_{0C} & \varphi_{0D} \\ \varphi_{A0} & \varphi_{AA} & \varphi_{AB} & \varphi_{AC} & \varphi_{AD} \\ \varphi_{B0} & \varphi_{BA} & \varphi_{BB} & \varphi_{BC} & \varphi_{BD} \\ \varphi_{C0} & \varphi_{CA} & \varphi_{CB} & \varphi_{CC} & \varphi_{CD} \\ \varphi_{D0} & \varphi_{DA} & \varphi_{DB} & \varphi_{DC} & \varphi_{DD} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} \quad (3.44)$$

En la Fig.3.15, se tiene un sistema de tres conductores cargados con cargas Q_A , Q_B y Q_C y la tierra como referencia para el potencial y con carga Q_O . El potencial de cada conductor puede reescribirse:

$$\begin{vmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{30} & P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_0 \\ Q_A \\ Q_B \\ Q_C \end{vmatrix} \quad (3.45)$$

Los coeficientes P_{ij} [Daraf], donde $i = 1, 2, 3$ y $j = 0, 1, 2, 3$ dependen de la geometría de los conductores, de su posición relativa y son mayores que cero.

Ya que $V_0 = 0$, entonces: $V_{A0} = V_A - V_0 = V_A - 0 = V_A$

En general:

$$V_{k0} = V_k \quad (3.46)$$

donde $k = A, B, C, \dots, N$

Si el sistema de la Fig.3.15, está libre de la influencia de otros cuerpos cargados no considerados:

$$Q_0 + Q_A + Q_B + \dots + Q_N = 0$$

$$Q_0 = - \sum_A^N Q_k$$

La Ec.(3.45) puede reescribirse:

$$\begin{vmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_{11} - P_{10} & P_{12} - P_{10} & P_{13} - P_{10} \\ P_{21} - P_{20} & P_{22} - P_{20} & P_{23} - P_{20} \\ P_{31} - P_{30} & P_{32} - P_{30} & P_{33} - P_{30} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_A \\ Q_B \\ Q_C \end{vmatrix} \quad (3.47)$$

Se definen los coeficientes de potencial:

$$a_{ij} \triangleq P_{ij} - P_{i0} \quad (3.48)$$

Así, la Ec.(3.47) toma la siguiente forma:

$$|V| = |A| |Q| \quad (3.49)$$

La Ec.(3.49) expresa que el potencial de un conductor depende de su carga y de la de otros conductores, es directamente proporcional a ellas, del medio en que se encuentran y de la posición relativa entre ellos. De la Fig.3.16:

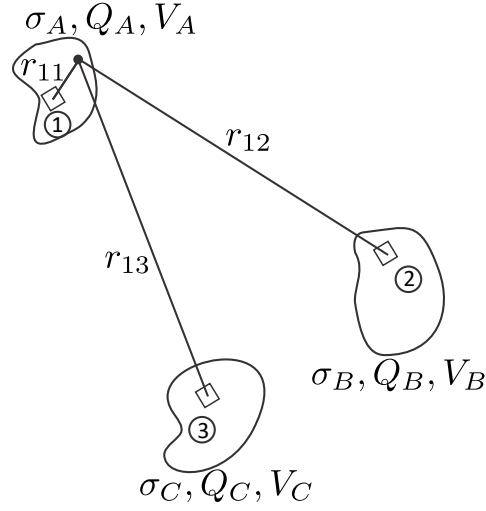


Figura 3.16 Sistema de tres conductores.

$$\begin{vmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_A \\ Q_B \\ Q_C \end{vmatrix} \quad (3.50)$$

$$\text{con: } Q_A = \int_{S_1} \sigma_A dS \quad Q_B = \int_{S_2} \sigma_B dS \quad Q_C = \int_{S_3} \sigma_C dS$$

Si las cargas de los conductores se varían a:

$$Q'_A = \int_{S_1} \sigma'_A dS \quad Q'_B = \int_{S_2} \sigma'_B dS \quad Q'_C = \int_{S_3} \sigma'_C dS$$

entonces, la Ec.(3.50) toma la forma siguiente:

$$\begin{vmatrix} V'_A \\ V'_B \\ V'_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q'_A \\ Q'_B \\ Q'_C \end{vmatrix} \quad (3.51)$$

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left[\int_{S_1} \frac{\sigma_A dS}{r_{11}} + \int_{S_2} \frac{\sigma_B dS}{r_{12}} + \int_{S_3} \frac{\sigma_C dS}{r_{13}} \right] \quad (3.52)$$

$$V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left[\int_{S_1} \frac{\sigma_A dS}{r_{21}} + \int_{S_2} \frac{\sigma_B dS}{r_{22}} + \int_{S_3} \frac{\sigma_C dS}{r_{23}} \right] \quad (3.53)$$

$$V_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left[\int_{S_1} \frac{\sigma_A dS}{r_{31}} + \int_{S_2} \frac{\sigma_B dS}{r_{32}} + \int_{S_3} \frac{\sigma_C dS}{r_{33}} \right] \quad (3.54)$$

Si las Ecs. (3.52), (3.53) y (3.54) se multiplican por Q'_A, Q'_B y Q'_C respectivamente, si se suman miembro a miembro las igualdades obtenidas, se cambia el orden de integración, se reorganizan los términos y se tiene en cuenta que $r_{ij} = r_{ji}$, se llega a:

$$\begin{aligned} V_A Q'_A + V_B Q'_B + V_C Q'_C &= \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{S_1} \sigma_A dS \left[\int_{S_1} \frac{\sigma'_A dS}{r_{11}} + \int_{S_2} \frac{\sigma'_B dS}{r_{12}} + \int_{S_3} \frac{\sigma'_C dS}{r_{13}} \right] \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{S_1} \sigma_B dS \left[\int_{S_1} \frac{\sigma'_A dS}{r_{21}} + \int_{S_2} \frac{\sigma'_B dS}{r_{22}} + \int_{S_3} \frac{\sigma'_C dS}{r_{23}} \right] \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{S_1} \sigma_C dS \left[\int_{S_1} \frac{\sigma'_A dS}{r_{31}} + \int_{S_2} \frac{\sigma'_B dS}{r_{32}} + \int_{S_3} \frac{\sigma'_C dS}{r_{33}} \right] \end{aligned}$$

De la expresión anterior se obtiene:

$$V_A Q'_A + V_B Q'_B + V_C Q'_C = V'_A Q_A + V'_B Q_B + V'_C Q_C \quad (3.55)$$

La Ec.(3.55) se llama Teorema de la Reciprocidad. Éste se emplea para hallar la condición que deben satisfacer los coeficientes de potencial.

Si en la Ec.(3.50): $Q_A \neq 0$, $Q_B = Q_C = 0$, entonces:

$$V_A = a_{11} Q_A \quad V_B = a_{21} Q_A \quad V_C = a_{31} Q_A \quad (3.56)$$

Si en la Ec.(3.51): $Q'_A = Q'_C = 0$, $Q'_B \neq 0$, entonces:

$$V'_A = a_{12} Q'_B \quad V'_B = a_{22} Q'_B \quad V'_C = a_{32} Q'_B \quad (3.57)$$

El teorema de la reciprocidad para esta combinación toma la siguiente forma:

$$V_B Q'_B = V'_A Q_A \quad (3.58)$$

Si las ecuaciones correspondientes de los conjuntos (3.56) y (3.57) se rempazan en la Ec.(3.58), se obtiene:

$$a_{12} = a_{21} \quad (3.59)$$

Los coeficientes de potencial son simétricos con respecto a la diagonal principal en las Ecs. (3.50) y (3.51).

Para el caso general, la Ec.(3.55) toma la siguiente forma:

$$\sum_A^N V_k Q'_k = \sum_A^N V'_k Q_k \quad (3.60)$$

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (3.61)$$

Si las cargas se expresan en función de los potenciales de los conductores, de la Ec.(3.49) se obtiene:

$$Q = |A|^{-1} |V| = |S| |V|$$

Donde $|A|^{-1}$ es la inversa de $|A|$. Los coeficientes S_{ij} son llamados coeficientes de potencial. Para el caso de la Fig.3.17, se tiene:

$$\begin{vmatrix} Q_A \\ Q_B \\ Q_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{vmatrix} \quad (3.62)$$

De la Ec.(3.62):

$$Q_A = S_{11}V_A + S_{12}V_B + S_{13}V_C \pm S_{12}V_A \pm S_{13}V_A$$

$$Q_A = (S_{11} + S_{12} + S_{13}) V_A - S_{12} (V_A - V_B) - S_{13} (V_A - V_C) \quad (3.63)$$

Se define:

$$C_{11} \triangleq S_{11} + S_{12} + S_{13} \quad (3.64)$$

$$C_{12} \triangleq -S_{12} \quad C_{13} \triangleq -S_{13} \quad (3.65)$$

De modo general:

$$C_{ii} \triangleq S_{i1} + S_{i2} + \dots + S_{iN} \quad (3.66)$$

$$C_{ij} \triangleq -S_{ij} \quad (3.67)$$

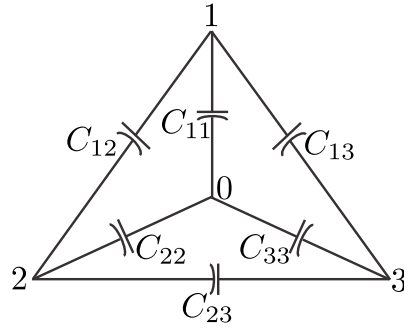


Figura 3.17 Interpretación de los coeficientes C_{ii} y C_{ij} .

$$Q_A = C_{11}V_A + C_{12}(V_A - V_B) + C_{13}(V_A - V_C) \quad (3.68)$$

C_{ii} : es la capacitancia propia del conductor i o la capacitancia parcial entre el conductor que ocupa la posición i y tierra.

C_{ij} : es la capacitancia mutua entre los conductores i y j en presencia de los demás o capacitancia parcial entre los conductores que ocupan la posición i y j .

La adición de un conductor nuevo en un sistema modifica las capacitancias parciales entre los ya existentes. La interpretación de las cargas sobre los conductores se puede deducir de la Fig.3.17.

$C_{11}V_A$: Carga sobre un capacitor conectado entre los conductores ubicados entre 1 y tierra, entre los cuales hay una diferencia de potencial $V_{A0} = V_A - V_0 = V_A - 0 = V_A$.

$C_{12}(V_A - V_B)$: Carga sobre un capacitor conectado entre los conductores ubicados entre 1 y 2, a través de los cuales hay una diferencia de potencial $V_{AB} = V_A - V_B$.

Los demás términos tienen una interpretación similar.

3.11. Expansión multipolar del potencial electrostático.

De la Fig.3.18 se tiene:

$$dQ = \rho d\tau \quad \mathbb{R}_i = \vec{r} - \vec{r}_i$$

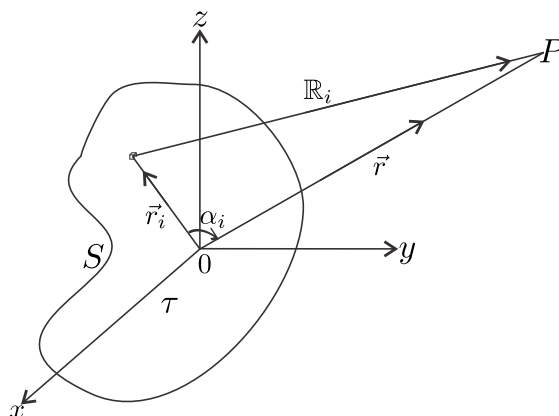


Figura 3.18 Expansión multipolar.

$$R_i = [r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos \alpha_i]^{\frac{1}{2}} \quad (3.69)$$

El potencial en P es:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{\tau} \frac{\rho d\tau}{R_i} \quad (3.70)$$

Si P se halla muy alejado del volumen $\frac{r_i}{r} \ll 1$, entonces:

$$\frac{1}{R_i} = [r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos \alpha_i]^{-\frac{1}{2}}$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{r} \left[1 - 2\frac{r_i}{r} \cos \alpha_i + \left(\frac{r_i}{r}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \longrightarrow m = + \left[-2\left(\frac{r_i}{r}\right) \cos \alpha_i + \left(\frac{r_i}{r}\right)^2 \right]$$

Se utiliza la siguiente aproximación del Teorema del Binomio de Newton:

$$(1 + m)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}m + \frac{1 \times 3}{2 \times 4}m^2 - \dots$$

Luego de aproximar se llega a:

$$\frac{1}{R_i} \approx \frac{1}{r} \left[1 + \frac{r_i}{r} \cos \alpha_i + \frac{1}{2} \left(\frac{r_i}{r}\right)^2 (3 \cos^2 \alpha_i - 1) \right] \quad (3.71)$$

La Ec.(3.71) se puede reescribir así:

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{\infty} \left[\left(\frac{r_i}{r} \right)^m P_m(\cos \alpha_i) \right] \quad (3.72)$$

Si en la Ec.(3.70) se reemplaza el valor de la Ec.(3.72):

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{\tau} dQ \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{\infty} \left[\left(\frac{r_i}{r} \right)^m P_m(\cos \alpha_i) \right]$$

Al ordenar, se obtiene:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{r^{m+1}} \int_{\tau} r_i^m P_m(\cos \alpha_i) dQ \quad (3.73)$$

En la Ec.(3.73) el primer término recibe el nombre de monopolar, el segundo dipolar, el tercero cuadripolar,

Si $\cos \alpha_i = \cos \theta$ se tiene un sistema lineal, así $P_m(\cos \alpha_i) = P_m(\cos \theta)$ representa los polinomios de Legendre. Los polinomios de Legendre se pueden obtener a partir de la fórmula de Rodrigues.

Para calcular los polinomios de Legendre, se utilizan las relaciones de recurrencia dadas por las Ecs. (2.121), (2.122) y (2.123), siendo $u = \cos \theta$:

3.11.1. Término monopolar.

En la Ec.(3.73) si $m = 0$, se obtiene el término monopolar:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o r} \int_{\tau} dQ = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o r} \quad (3.74)$$

De la Ec.(3.74) se nota que la distribución se comporta como si fuera una carga puntual colocada en el origen. La carga Q se denomina momento monopolar de la distribución de carga.

El campo electrostático se obtiene al hallar el gradiente negativo del potencial electrostático.

$$\mathbb{E} = -\nabla V = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o r^2} \vec{a}_r \quad (3.75)$$

3.11.2. Término dipolar.

El término dipolar se obtiene al hacer $m = 1$ en la Ec.(3.73):

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_{\tau} r_i \cos\alpha_i dQ \quad (3.76)$$

De la Fig.3.18, se tiene:

$$\cos\alpha_i = \vec{a}_r \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i} = \vec{a}_r \cdot \vec{a}_{r_i} \quad (3.77)$$

Si se toma la integral del término dipolar:

$$\int_{\tau} r_i \cos\alpha_i dQ = \int_{\tau} \vec{a}_r \cdot \vec{r}_i dQ = \vec{a}_r \cdot \int_{\tau} \vec{r}_i dQ \quad (3.78)$$

De la Ec.(3.78) se define el momento dipolar eléctrico:

$$\vec{p} \triangleq \int_{\tau} \vec{r}_i dQ \quad (3.79)$$

$$\int_{\tau} r_i \cos\alpha_i dQ = \vec{a}_r \cdot \vec{p} = \vec{p} \cdot \vec{a}_r$$

El potencial del término dipolar es:

$$V = \frac{\vec{p} \cdot \vec{a}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3.80)$$

La Ec.(3.80) se reescribe así:

$$V = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (3.81)$$

El campo eléctrico se obtiene a partir del gradiente negativo del potencial debido a la distribución dipolar, $\mathbb{E} = -\nabla V$:

$$\mathbb{E} = -\nabla V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (3.82)$$

Para calcular el resultado de la Ec.(3.82) se utiliza la siguiente identidad vectorial $\nabla uv = u\nabla v + v\nabla u$, donde $u = \vec{p} \cdot \vec{r}$ y $v = \frac{1}{r^3}$

por lo tanto:

$$\nabla V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left[(\vec{p} \cdot \vec{r}) \nabla r^{-3} + r^{-3} \nabla (\vec{p} \cdot \vec{r}) \right] \quad (3.83)$$

De $\nabla \mathbb{R}^n = nR^{n-2}\mathbb{R}$ para $\mathbb{R} = \vec{r}$, $R = r$ y $n = -3$:

$$\nabla r^{-3} = -3r^{-5}\vec{r} = -\frac{3\vec{r}}{r^5} \quad (3.84)$$

Si $\vec{p} \cdot \vec{r} = (p_x\vec{a}_x + p_y\vec{a}_y + p_z\vec{a}_z) \cdot (x\vec{a}_x + y\vec{a}_y + z\vec{a}_z)$

entonces: $\vec{p} \cdot \vec{r} = xp_x + yp_y + zp_z$

$$\nabla (\vec{p} \cdot \vec{r}) = p_x\vec{a}_x + p_y\vec{a}_y + p_z\vec{a}_z = \vec{p} \quad (3.85)$$

Si las Ecs. (3.84) y (3.85) se rempazan en la Ec.(3.83), se tiene:

$$\mathbb{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left[\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right] \quad (3.86)$$

En la Ec.(3.86), se observa que la distribución se comporta como si fuera un dipolo eléctrico colocado en el origen. $\vec{p}$ se denomina el momento dipolar de la distribución de carga. Dos expresiones adicionales para el dipolo, se obtendrán en el ejemplo 1 de esta Unidad.

3.11.3. Trabajo y torque sobre un dipolo.

El cero de referencia para la energía potencial, se elige cuando el eje del dipolo es normal al campo electrostático, o sea en $\theta = \frac{\pi}{2}$. Si el dipolo se mueve en cualquier dirección sobre el plano xy, no se requiere realizar ningún trabajo. El trabajo que efectúa el campo, para girar el dipolo desde $\frac{\pi}{2}$ a θ , se calcula así:

$$dW = \mathbb{F} \cdot \vec{d\ell}$$

$$\mathbb{F} = QE_o\vec{a}_z \quad \vec{d\ell} = dd\theta\vec{a}_\theta \quad \vec{a}_z \cdot \vec{a}_\theta = -\text{sen}\theta$$

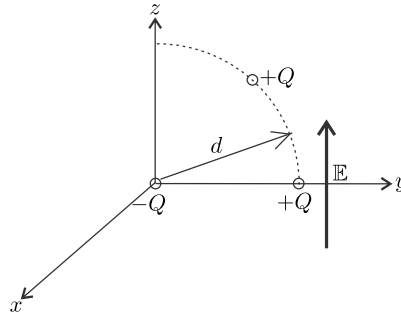


Figura 3.19 Torque sobre un dipolo.

$$dW = -QE_o d \cos \theta = -p E_o \sin \theta d\theta$$

$$\int_0^W dW = -p E_o \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin \theta d\theta = -p E_o \cos \theta$$

$$W = -\vec{p} \cdot \mathbb{E} \quad (3.87)$$

La Ec.(3.87) expresa que un dipolo alineado con el campo tiene una energía potencial mayor que cuando no está alineado con él.

El torque o par al cual se haya sometido el dipolo cuando forma un ángulo θ con el campo, se determina así:

$$\mathbb{T} = \vec{r} \times \mathbb{F} \quad \vec{r} = d \vec{a}_r \quad \mathbb{F} = Q\mathbb{E}$$

$$\mathbb{T} = d \vec{a}_r \times Q\mathbb{E}$$

$$\mathbb{T} = \vec{p} \times \mathbb{E} \quad (3.88)$$

La Ec.(3.88) expresa que si un dipolo orientado de modo que su eje forme un ángulo θ con el campo eléctrico, está sometido a un par que tiende a alinearlo en la dirección de aquél. Este hecho tiene aplicación en la Unidad siguiente cuando se trabaje con dieléctricos polares.

3.11.4. Traducción del origen de coordenadas.

El origen O_2 se obtiene al trasladar los ejes mediante un desplazamiento $\vec{r}$. De la Fig.3.19:

$$\vec{p} = \int_{\tau} \vec{r}_2 dQ \quad (3.89)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 - \vec{r} \quad (3.90)$$

Si la Ec.(3.90) se reemplaza en la Ec.(3.89):

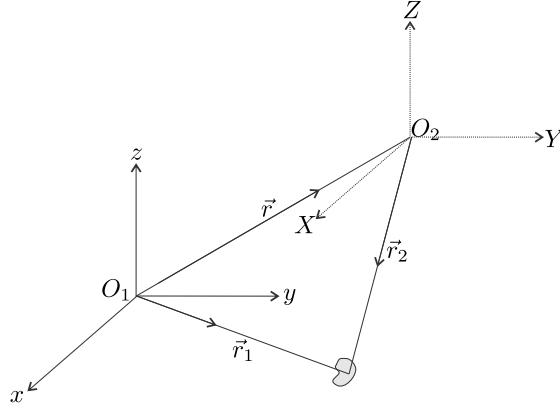


Figura 3.20 Traslación del eje de coordenadas.

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \int_{\tau} (\vec{r}_1 - \vec{r}) dQ = \int_{\tau} \vec{r}_1 dQ - \int_{\tau} \vec{r} dQ = \int_{\tau} \vec{r}_1 dQ - \vec{r} \int_{\tau} dQ \\ \vec{p} &= \int_{\tau} \vec{r}_1 dQ - \vec{r} Q_o \end{aligned} \quad (3.91)$$

La Ec.(3.91) expresa que el momento dipolar con respecto a O_2 es diferente al calculado con respecto a O_1 . Si $Q_o = 0$, el momento dipolar es independiente de la elección del origen de coordenadas y el término dipolar será predominante en la Ec.(3.91). Por lo tanto, se necesitan por lo menos dos cargas en la distribución, de ahí el nombre de dipolar.

Esta demostración es muy útil en la Unidad IV, cuando se trabaja con aislantes. En ellos se supone que las moléculas se comportan como dipolos y por lo tanto el momento dipolar de la distribución es independiente del origen del sistema de coordenadas.

3.11.5. Término cuadripolar

El término cuadripolar se obtiene al hacer $m = 2$ en la Ec.(3.73):

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o r^3} \int_{\tau} \frac{1}{2} r_i^2 (3\cos^2\alpha_i - 1) dQ$$

$$\frac{1}{2}r_i^2(3\cos^2\alpha_i - 1) = r_i^2\frac{1}{2}\left[3\left(\vec{a}_r \cdot \frac{\vec{r}}{r_i}\right)^2 - \vec{a}_r \cdot \vec{a}_r\right] = \frac{1}{2}\left[3(\vec{a}_r \cdot \vec{r}_i)^2 - r_i^2\vec{a}_r \cdot \vec{a}_r\right] \quad (3.92)$$

$$\vec{a}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x}{r}\vec{a}_x + \frac{y}{r}\vec{a}_y + \frac{z}{r}\vec{a}_z = \ell_x\vec{a}_x + \ell_y\vec{a}_y + \ell_z\vec{a}_z$$

Se define

$$\ell_x \triangleq \frac{x}{r} \quad \ell_y \triangleq \frac{y}{r} \quad \ell_z \triangleq \frac{z}{r}$$

El primer y segundo términos del último corchete de la Ec.(3.92) se evalúan así:

$$\vec{a}_r \cdot \vec{r}_i = (\ell_x\vec{a}_x + \ell_y\vec{a}_y + \ell_z\vec{a}_z) \cdot (x_i\vec{a}_x + y_i\vec{a}_y + z_i\vec{a}_z)$$

$$\vec{a}_r \cdot \vec{r}_i = \ell_x x_i + \ell_y y_i + \ell_z z_i \quad (3.93)$$

$$\vec{a}_r \cdot \vec{a}_r = (\ell_x\vec{a}_x + \ell_y\vec{a}_y + \ell_z\vec{a}_z) \cdot (\ell_x\vec{a}_x + \ell_y\vec{a}_y + \ell_z\vec{a}_z)$$

$$\vec{a}_r \cdot \vec{a}_r = \ell_x^2 + \ell_y^2 + \ell_z^2 \quad (3.94)$$

Si las Ecs.(3.93) y (3.94) se rempazan en la Ec.(3.92), se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}r_i^2(3\cos^2\alpha_i - 1) &= \frac{1}{2}\left[3(\ell_x x_i + \ell_y y_i + \ell_z z_i)^2 - r_i^2(\ell_x^2 + \ell_y^2 + \ell_z^2)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[3(\ell_x^2 x_i^2 + \ell_y^2 y_i^2 + \ell_z^2 z_i^2 + 2\ell_x \ell_y x_i y_i + 2\ell_x \ell_z x_i z_i + 2\ell_y \ell_z y_i z_i) - r_i^2(\ell_x^2 + \ell_y^2 + \ell_z^2)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[\ell_x^2(3x_i^2 - r_i^2) + \ell_y^2(3y_i^2 - r_i^2) + \ell_z^2(3z_i^2 - r_i^2) + 6\ell_x \ell_y x_i y_i + 6\ell_x \ell_z x_i z_i + 6\ell_y \ell_z y_i z_i\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}r_i^2(3\cos^2\alpha_i - 1) &= \frac{1}{2}\left[\ell_x^2(3x_i^2 - r_i^2) + 3\ell_x \ell_y x_i y_i + 3\ell_x \ell_z x_i z_i + 3\ell_y \ell_x y_i x_i + \right. \\ &\quad \left. \ell_y^2(3y_i^2 - r_i^2) + 3\ell_y \ell_z y_i z_i + 3\ell_z \ell_x z_i x_i + 3\ell_z \ell_y z_i y_i + \ell_z^2(3z_i^2 - r_i^2)\right] \quad (3.95) \end{aligned}$$

Se define:

$$Q_{jk} \triangleq \int_{\tau} (3j_i k_i - r_i^2 \delta_{jk}) dQ \quad (3.96)$$

$$\delta = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases} \quad \text{Delta de Krönecker} \quad (3.97)$$

donde $j, k = x, y, z$

La distribución se comporta como si fuera un cuadripolo colocado en el origen. Q_{jk} recibe el nombre de componentes del tensor del momento cuadripolar.

$$|Q| = \begin{vmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{zx} & Q_{zy} & Q_{zz} \end{vmatrix} \quad (3.98)$$

Si se utiliza la Ec.(3.96), se tiene:

$$|Q| = \begin{vmatrix} \int_{\tau} (3x_i^2 - r_i^2) dQ & \int_{\tau} 3x_i y_i dQ & \int_{\tau} 3x_i z_i dQ \\ \int_{\tau} 3y_i x_i dQ & \int_{\tau} (3y_i^2 - r_i^2) dQ & \int_{\tau} 3y_i z_i dQ \\ \int_{\tau} 3z_i x_i dQ & \int_{\tau} 3z_i y_i dQ & \int_{\tau} (3z_i^2 - r_i^2) dQ \end{vmatrix} \quad (3.99)$$

Si la Ec.(3.99) se remplaza en la Ec.(3.95), se obtiene:

$$\frac{1}{2} r_i^2 (3 \cos^2 \alpha_i - 1) = \frac{1}{2} [\ell_x^2 Q_{xx} + 3\ell_x \ell_y Q_{xy} + 3\ell_x \ell_z Q_{xz} + 3\ell_y \ell_x Q_{yx} + \ell_y^2 Q_{yy} + 3\ell_y \ell_z Q_{yz} + 3\ell_z \ell_x Q_{zx} + 3\ell_z \ell_y Q_{zy} + \ell_z^2 Q_{zz}]$$

Por lo tanto:

$$\int_{\tau} \frac{1}{2} r_i^2 (3 \cos^2 \alpha_i - 1) dQ = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k \ell_j \ell_k Q_{jk}$$

El potencial de la distribución cuadripolar es:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o r^3} \frac{1}{2} \sum_j \sum_k \ell_j \ell_k Q_{jk} \quad (3.100)$$

Otra manera de expresar el potencial cuadripolar es:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o r^5} \frac{1}{2} \sum_j \sum_k jk Q_{jk} \quad (3.101)$$

Se puede verificar que $Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 0$. El resultado es independiente de la ubicación del origen de coordenadas y de la naturaleza detallada de la distribución de carga.

3.12. Método de las imágenes o de Lord Kelvin.

Consiste en transformar un problema complicado a otro más sencillo que conserve idénticas las condiciones de frontera. A continuación, se estudiarán algunos casos de bastante interés en teoría de campos.

3.12.1. Carga puntual próxima a un plano conductor muy grande a potencial cero.

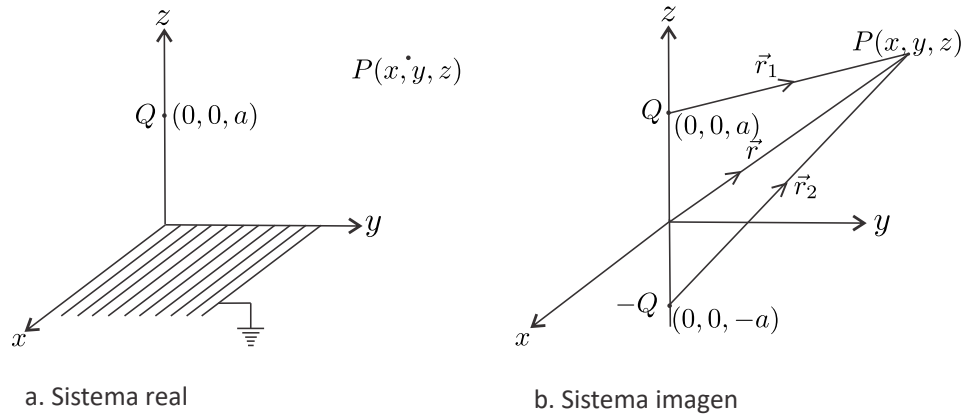


Figura 3.21 Carga puntual próxima a un plano muy grande aterrizado.

De la Fig. 3.21b, el potencial en P es:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (3.102)$$

De la Fig. 3.21b, también se obtiene:

$$\vec{r}_1 = x\vec{a}_x + y\vec{a}_y + (z - a)\vec{a}_z$$

$$r_1 = \left[x^2 + y^2 + (z - a)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.103)$$

$$\vec{r}_2 = x\vec{a}_x + y\vec{a}_y + (z + a)\vec{a}_z$$

$$r_2 = [x^2 + y^2 + (z + a)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (3.104)$$

Si las Ecs.(3.103) y (3.104) se remplazan en la Ec.(3.102):

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2}} \right] \quad (3.105)$$

Si en las Ecs.(3.103) y (3.104) $z = 0 \rightarrow r_1 = r_2$, el plano conductor se comporta como una superficie equipotencial, $V = 0$

El campo eléctrico se obtiene a partir del gradiente negativo del potencial escalar eléctrico:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &= -\nabla V = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \nabla \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \nabla \left(\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} \right) \\ \mathbb{E} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \left\{ \frac{x\vec{a}_x + y\vec{a}_y + (z - a)\vec{a}_z}{[x^2 + y^2 + (z - a)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{x\vec{a}_x + y\vec{a}_y + (z + a)\vec{a}_z}{[x^2 + y^2 + (z + a)^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} \end{aligned} \quad (3.106)$$

La densidad de carga superficial en el plano $z = 0$ es:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &= \frac{-2aQ}{4\pi\epsilon_o (x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{a}_z = \frac{\sigma}{\epsilon_o} \vec{a}_z \\ \sigma &= -\frac{aQ}{2\pi (x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (3.107)$$

En el conductor la carga inducida es $Q_{ind.} = \int_S \sigma dS$, $dS = dxdy = r dr d\varphi$ y $r^2 = x^2 + y^2$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} Q_{ind.} &= -\frac{aQ}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{r dr d\varphi}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \\ Q_{ind.} &= -Q \end{aligned} \quad (3.108)$$

La Ec.(3.108) muestra que la carga inducida en el plano $z = 0$ es de igual magnitud y naturaleza diferente a la carga puntual próxima al plano conductor muy extenso a potencial cero.

El potencial eléctrico y el campo electrostático se calculan en la región donde existe la carga real, $z > 0$ en este caso; la imagen se sitúa en la otra región, o sea, $z < 0$.

3.12.2. Carga puntual ubicada entre dos planos conductores muy grandes que se cortan formando un ángulo β y están a potencial cero.

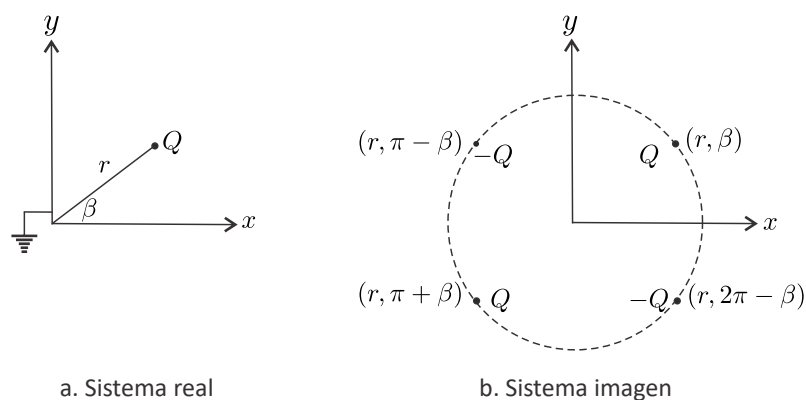


Figura 3.22 Carga puntual entre planos muy grandes aterrizados.

El número de imágenes N que se forman en el sistema equivalente cuando α es un submúltiplo de π es:

$$N = \begin{cases} \frac{2\pi}{\alpha} - 1 & \longrightarrow \text{si } \frac{2\pi}{\alpha} \text{ es par} \\ \frac{2\pi}{\alpha} & \longrightarrow \text{si } \frac{2\pi}{\alpha} \text{ es impar} \end{cases} \quad (3.109)$$

Las imágenes se hallan sobre una circunferencia de radio r . Se ilustrará para $\alpha = \frac{\pi}{2}$. En este caso $N = 3$.

En la Fig.3.22b, las imágenes ubicadas en (r, β) , $(r, \pi - \beta)$ y $(r, 2\pi - \beta)$ no satisfacen las condiciones de frontera. Ellas y la ubicada en $(r, \pi + \beta)$ satisfacen las condiciones de límite y se dice que es equivalente al sistema de una carga puntual ubicada entre dos planos conductores a potencial de tierra y que se corta a $\frac{\pi}{2}$.

Las imágenes se determinan del mismo modo que en Óptica.

3.12.3. Carga puntual próxima a una esfera conductora a potencial cero.

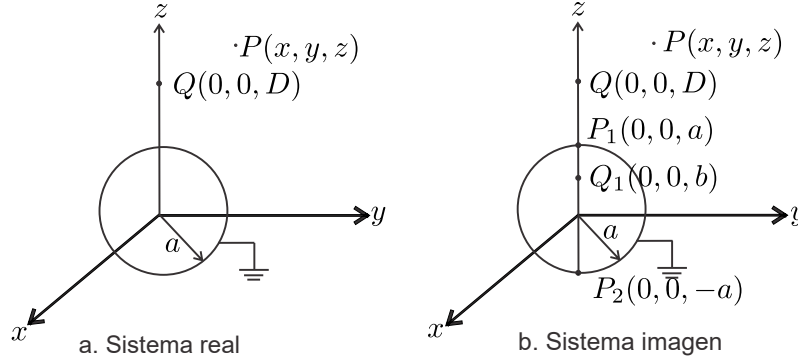


Figura 3.23 Carga puntual próxima a una esfera conductora aterrizada.

Una carga puntual Q próxima a una esfera conductora a potencial cero se muestra en la Fig.3.23a. En la Fig.3.23b se sustituye el conductor por su imagen Q_1 , ésta y Q anularán el potencial sobre la superficie esférica. La simetría del problema sugiere que la carga imagen se encuentra sobre la línea que une la carga y el centro de la esfera. Para hallar su magnitud, naturaleza y ubicación se utiliza el hecho de que la esfera conductora se comporta como una superficie equipotencial.

En el punto P_1 el potencial es:

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o(D-a)} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_o(a-b)} = 0 \quad (3.110)$$

En el punto P_2 el potencial es:

$$V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o(D+a)} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_o(a+b)} = 0 \quad (3.111)$$

Si se solucionan las Ecs. (3.110) y (3.111), se tiene:

$$Q_1 = -\frac{a}{D}Q \quad b = \frac{a^2}{D} \quad (3.112)$$

Q y Q_1 anulan el potencial en cualquier punto de la superficie esférica.

De la Fig.3.24:

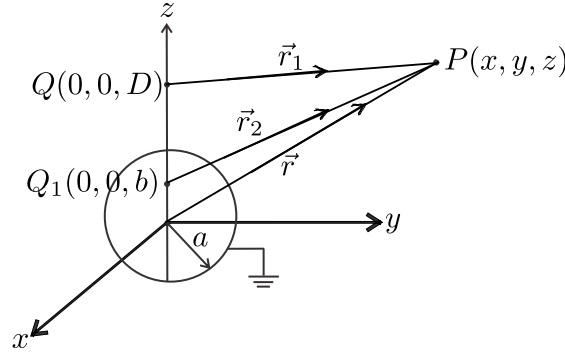


Figura 3.24 Carga puntual Q próxima a una esfera conductora aterrizada y su imagen.

$$r_1 = \sqrt{D^2 + r^2 - 2Dr\cos\theta} \quad (3.113)$$

$$r_2 = \sqrt{b^2 + r^2 - 2br\cos\theta} \quad (3.114)$$

Si en la Ec.(3.114) se reemplaza el valor de b dado por la Ec.(3.112), se obtiene:

$$Dr_2 = r_3 = \sqrt{a^4 + D^2r^2 - 2a^2Dr\cos\theta} \quad (3.115)$$

De la Fig.3.24 el potencial en el punto P es

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

por lo tanto:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{a}{Dr_2} \right) \quad (3.116)$$

Si en la Ec.(3.116) se reemplazan las Ecs. (3.113) y (3.115) se tiene:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{D^2 + r^2 - 2Dr\cos\theta}} - \frac{a}{\sqrt{a^4 + D^2r^2 - 2a^2Dr\cos\theta}} \right] \quad (3.117)$$

Si las Ecs.(3.113) y (3.115) se evalúan en $r = a$, se tiene:

$$r_1 = \sqrt{a^2 + D^2 - 2aD\cos\theta} \quad Dr_2 = r_3 = a\sqrt{a^2 + D^2 - 2aD\cos\theta} = ar_1$$

Si los valores anteriores se remplazan en la Ec.(3.116), se obtiene

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{a}{ar_1} \right) = 0$$

Por lo tanto las soluciones para b y Q_1 , son correctas ya que satisfacen la Ec.(3.116). La superficie conductora esférica es una equipotencial a cero voltios. El campo eléctrico se obtiene a partir del gradiente negativo de la función potencial escalar eléctrica:

$$\mathbb{E} = -\nabla V = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \nabla \left(\frac{1}{r_1} - \frac{a}{r_3} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \nabla \left(\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{a\vec{r}_3}{r_3^3} \right) \quad (3.118)$$

donde:

$$\begin{aligned} -\nabla \left(\frac{1}{r_1} \right) &= \frac{r - D\cos\theta}{r_1^3} \vec{a}_r + \frac{D\sin\theta}{r_1^3} \vec{a}_\theta \\ \nabla \left(\frac{a}{r_3} \right) &= -\frac{aD(Dr - a^2\cos\theta)}{r_3^3} \vec{a}_r + \frac{a^3D\sin\theta}{r_3^3} \vec{a}_\theta \end{aligned}$$

Entonces, el campo eléctrico en el exterior de la esfera es:

$$\mathbb{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \left[\frac{r - D\cos\theta}{r_1^3} - \frac{aD(Dr - a^2\cos\theta)}{r_3^3} \right] \vec{a}_r + \frac{QD\sin\theta}{4\pi\epsilon_o} \left[\frac{1}{r_1^3} - \frac{a^3}{r_3^3} \right] \vec{a}_\theta \quad (3.119)$$

En $r = a$ se tiene una superficie conductora y el campo eléctrico es normal a ella. Si en la Ec.(3.119) se reemplaza $r = a$, se tiene:

$$\mathbb{E} = \frac{Q(a^2 - D^2)}{4\pi\epsilon_o a (a^2 + D^2 - 2aD\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} \vec{a}_r \quad (3.120)$$

La densidad de carga superficial inducida sobre la esfera se obtiene de la siguiente manera, se sabe que $\mathbb{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_o} \vec{a}_r$ si ésta se compara con la Ec.(3.120):

$$\sigma = \frac{Q(a^2 - D^2)}{4\pi a (a^2 + D^2 - 2aD\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

La carga inducida en la esfera es:

$$Q_{ind.} = \int_S \sigma dS = \frac{Q(a^2 - D^2)}{4\pi a} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{a^2 \sin\theta d\theta d\varphi}{(a^2 + D^2 - 2aD\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$Q_{ind.} = -\frac{D}{a}Q = Q_1 \quad (3.121)$$

La Ec.(3.121) indica que la carga inducida sobre la esfera conductora es equivalente a la de la carga imagen que sustituye a la esfera. Físicamente no hay carga en el interior del conductor, matemáticamente sí. Sólo es un sistema equivalente y nada más!.

3.12.4. Esfera aislada de tierra y descargada.

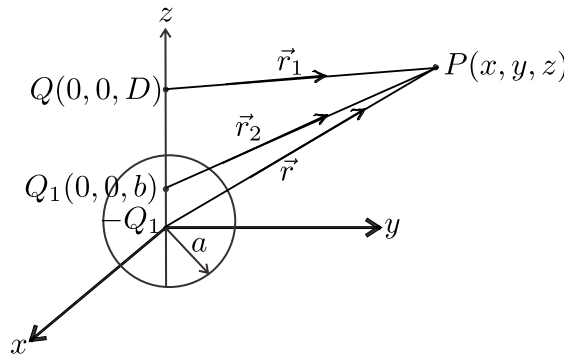


Figura 3.25 Imágenes Q y Q_1 en el interior de una esfera conductora aislada de tierra.

En la Fig.3.25, si la esfera está aislada de tierra y se desea mantenerla eléctricamente neutra, se procede como se hizo para la esfera a potencial cero y una carga $-Q_1$ se coloca en el centro de la esfera, así Q , Q_1 y $-Q_1$ mantendrán la superficie esférica a potencial constante. Por lo tanto:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{Q}{r_1} + \frac{Q_1}{r_2} + \frac{-Q_1}{r} \right) \quad (3.122)$$

La carga superficial total sobre la esfera es cero. Una carga $-Q_1$ que se distribuye uniformemente sobre la superficie y otra Q_1 que no se distribuye uniformemente y se debe a la carga a la carga Q cercana a la esfera.

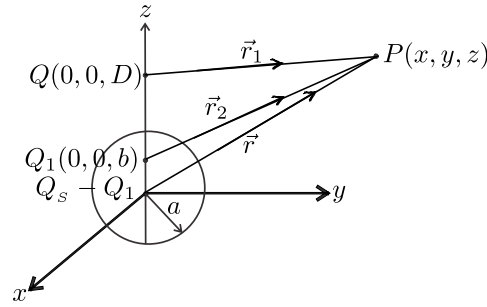


Figura 3.26 Imágenes $-Q_1$ y $Q_S - Q_1$ en el interior de una esfera conductora aislada de tierra.

3.12.5. Esfera aislada de tierra y con carga Q_S .

Se procede como se hizo para la esfera a potencial cero y una carga $Q_S - Q_1$ que se sitúa en el centro de la esfera. Ver la Fig.3.26. Así el potencial eléctrico en el punto P es:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{Q}{r_1} + \frac{Q_1}{r_2} + \frac{Q_S - Q_1}{r} \right) \quad (3.123)$$

3.12.6. Línea de carga frente a un plano conductor muy extenso a potencial cero.

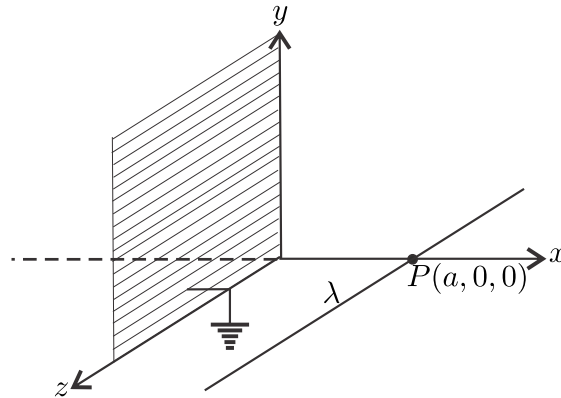


Figura 3.27 Línea de carga λ frente a un plano conductor muy grande aterrizado.

Si el plano conductor muy extenso se sustituye por una línea de carga con densidad de carga longitudinal $-\lambda$ a una distancia a a la izquierda del plano, cualquier punto

de éste equidistará de las líneas de carga y se encontrará a potencial cero.

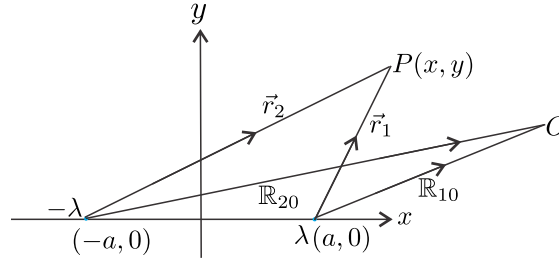


Figura 3.28 Sistema equivalente de una línea de carga λ frente a un plano conductor muy grande aterrizado.

Estos sistemas son equivalentes, ya que las condiciones de frontera se mantienen. En la región $y > 0$, las líneas de carga darán la solución correcta para línea de carga frente a un plano conductor muy extenso a potencial cero. Si la línea de carga es muy larga, la coordenada z no tendrá influencia en el cálculo del potencial. De la Fig.3.28:

$$\vec{r}_1 = (x - a)\vec{a}_x + y\vec{a}_y$$

$$r_1 = \sqrt{(x - a)^2 + y^2} \quad (3.124)$$

$$\vec{r}_2 = (x + a)\vec{a}_x + y\vec{a}_y$$

$$r_2 = \sqrt{(x + a)^2 + y^2} \quad (3.125)$$

El potencial en P será:

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{R_{10}}{r_1} + \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{R_{20}}{r_2}$$

O es el punto de referencia para el potencial, el cual se considera alejado de las líneas de carga. Entonces $R_{10} \approx R_{20}$ y por lo tanto:

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (3.126)$$

Si los valores de r_1 y r_2 dados por las Ecs. (3.124) y (3.125) se rempazan en la Ec.(3.126), se obtiene:

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}} \quad (3.127)$$

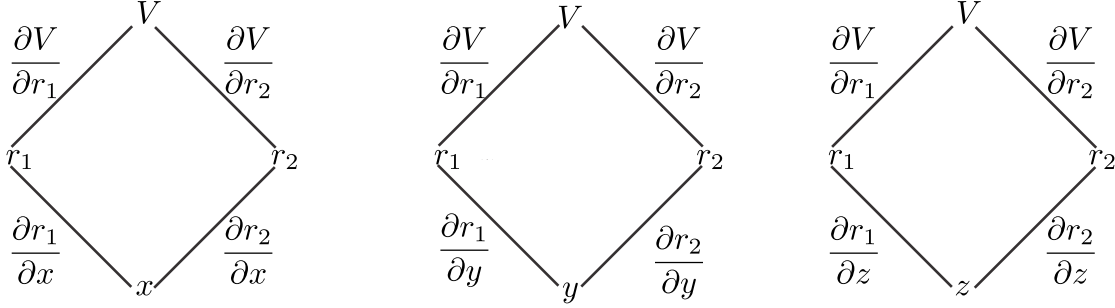


Figura 3.29 Derivación en cadena para el campo eléctrico.

El campo eléctrico se obtiene a partir del gradiente negativo del potencial eléctrico.

$$\mathbb{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{a}_y\right) \quad (3.128)$$

Se utiliza la regla en cadena para calcular las derivadas parciales en la Ec.(3.126):

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial x} \quad (3.129)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial y} \quad (3.130)$$

$$\frac{\partial V}{\partial r_1} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_1} \quad (3.131)$$

$$\frac{\partial V}{\partial r_2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_2} \frac{\partial r_1}{\partial x} \quad (3.132)$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial x} = \frac{1}{2} \left[(x-a)^2 + y^2 \right]^{-\frac{1}{2}} 2(x-a) = \frac{x-a}{r_1} \quad (3.133)$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial x} = \frac{1}{2} \left[(x+a)^2 + y^2 \right]^{-\frac{1}{2}} 2(x+a) = \frac{x+a}{r_2} \quad (3.134)$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial y} = \frac{1}{2} \left[(x-a)^2 + y^2 \right]^{-\frac{1}{2}} 2y = \frac{y}{r_1} \quad (3.135)$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial y} = \frac{1}{2} \left[(x+a)^2 + y^2 \right]^{-\frac{1}{2}} 2y = \frac{y}{r_2} \quad (3.136)$$

Si las Ecs.(3.131), (3.132), (3.133) y (3.134) se remplazan en la Ec.(3.129):

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o} \left[\frac{x+a}{r_2^2} - \frac{x-a}{r_1^2} \right] \\ \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o} \left[\frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} \right] \end{aligned} \quad (3.137)$$

De manera similar se halla la otra derivada parcial, se remplazan las Ecs.(3.131), (3.132), (3.135) y (3.136) se remplazan en la Ec.(3.130):

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\lambda y}{2\pi\epsilon_o} \left[\frac{1}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{1}{(x-a)^2 + y^2} \right] \quad (3.138)$$

Por lo tanto, el campo eléctrico es:

$$\mathbb{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o} \left\{ \left[\frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} \right] \vec{a}_x + \left[\frac{y}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{y}{(x+a)^2 + y^2} \right] \vec{a}_y \right\} \quad (3.139)$$

Para determinar la ecuación de las líneas de campo se procede así:

$$\begin{aligned} \frac{E_y}{E_x} &= \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\lambda y}{2\pi\epsilon_o} \left[\frac{1}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{1}{(x+a)^2 + y^2} \right]}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o} \left[\frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} \right]} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{y(r_2^2 - r_1^2)}{(x-a)r_2^2 - (x+a)r_1^2} \end{aligned} \quad (3.140)$$

A continuación se obtiene el numerador y denominador de la fracción anterior, al utilizar los valores respectivas de las Ecs.(3.124) y (3.125):

$$r_2^2 - r_1^2 = (x+a)^2 + y^2 - (x-a)^2 - y^2 = 4ax \quad (3.141)$$

$$(x - a) r_2^2 - (x + a) r_1^2 = 2a (x^2 - y^2 - a^2) \quad (3.142)$$

Si las Ecs. (3.141) y (3.142) se remplazan en la Ec.(3.140), se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2}$$

$$2xydx + (y^2 - x^2 + a^2) dy = 0 \quad (3.143)$$

La Ec.(3.143) se soluciona mediante el método del factor integrante:

$$2xy\mu dx + (y^2 - x^2 + a^2) \mu dy = 0 \quad (3.144)$$

Se debe satisfacer la siguiente condición:

$$\frac{\partial}{\partial y} (2xy\mu) = \frac{\partial}{\partial x} [(y^2 - x^2 + a^2) \mu]$$

Al diferenciar se obtiene:

$$2x \left(\mu + y \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) = \mu (-2x) + \frac{\partial \mu}{\partial x} (y^2 - x^2 + a^2)$$

En general $\mu = \mu(x, y)$. En este caso $\mu = \mu(y)$ y $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial \mu}{\mu} = -2 \frac{\partial y}{y} \rightarrow \ln \mu = \ln y^{-2} \rightarrow \mu = \frac{1}{y^2} \quad (3.145)$$

Si se remplaza la Ec.(3.145) en la Ec.(3.144):

$$\frac{2xy}{y^2} dx + \frac{y^2 - x^2 + a^2}{y^2} dy = 0$$

Entonces:

$$d \left(\frac{x^2}{y} \right) + d(y) - a^2 d \left(\frac{1}{y} \right) = 0$$

Al integrar se tiene:

$$\frac{x^2}{y} + y - \frac{a^2}{y} = c \rightarrow x^2 + y^2 - cy = a^2 \quad (3.146)$$

Si la Ec.(3.146) se factoriza con el fin de identificar la curva, se obtiene:

$$x^2 + \left(y - \frac{c}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{4a^2 + c^2}{2}}\right)^2 \quad (3.147)$$

Las líneas de campo son circunferencias cuyo centro está en $\left(0, \frac{c}{2}\right)$ y radio $R = \sqrt{\frac{4a^2 + c^2}{2}}$. □

La ecuación de las líneas equipotenciales se obtiene al tener en cuenta la ortogonalidad con las líneas de campo:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 - y^2 - a^2}{2xy} \quad (3.148)$$

La Ec.(3.148) se soluciona mediante el método del factor integrante.

$$2xy\mu dy + (x^2 - y^2 - a^2)\mu dx = 0 \quad (3.149)$$

En la Ec.(3.149) se debe satisfacer la siguiente condición:

$$\frac{\partial}{\partial x} (2xy\mu) = \frac{\partial}{\partial y} [(x^2 - y^2 - a^2)\mu]$$

Al diferenciar se obtiene:

$$2y \left(\mu + x \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) = \mu (-2y) + \frac{\partial \mu}{\partial y} (x^2 - y^2 - a^2)$$

En general $\mu = \mu(x, y)$. En este caso $\mu = \mu(x)$ y $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$. Por lo tanto:

$$\frac{\partial \mu}{\mu} = -2 \frac{\partial x}{x} \rightarrow \ln \mu = \ln x^{-2} \rightarrow \mu = \frac{1}{x^2} \quad (3.150)$$

Si se remplace la Ec.(3.150) en la Ec.(3.149):

$$\frac{2xy}{x^2} dy + \frac{x^2 - y^2 - a^2}{x^2} dx = 0 \rightarrow d\left(\frac{y^2}{x}\right) + d(x) + a^2 d\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Al integrar se tiene:

$$\frac{y^2}{x} + x + \frac{a^2}{x} = k \rightarrow x^2 - kx + y^2 = -a^2 \quad (3.151)$$

Si la Ec.(3.151) se factoriza con el fin de identificar la curva, se obtiene:

$$\left(x - \frac{k}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\sqrt{\frac{k^2 - 4a^2}{2}}\right)^2 \quad (3.152)$$

Las líneas equipotenciales son circunferencias con centro en $\left(\frac{k}{2}, 0\right)$ y radio $R = \sqrt{\frac{k^2 - 4a^2}{2}}$.

Otra manera de hallar la ecuación de las líneas equipotenciales es a partir de la Ec.(3.126) si se considera que $V = V_o$, entonces:

$$V_o = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (3.153)$$

La Ec.(3.153) se satisface si $\frac{r_2}{r_1} = m$. En este caso:

$$\sqrt{(x+a)^2 + y^2} = m\sqrt{(x-a)^2 + y^2} \quad (3.154)$$

Si se elevan al cuadrado ambos miembros, se divide entre $m^2 - 1$, donde $m \neq 1$, se reorganiza y factoriza, se obtiene:

$$\left(x - a\frac{m^2 + 1}{m^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2am}{m^2 - 1}\right)^2 \quad (3.155)$$

Las líneas equipotenciales son circunferencias con centro en $\left(a\frac{m^2 + 1}{m^2 - 1}, 0\right)$ y radio

$$R = \frac{2am}{m^2 - 1}.$$

Las superficies equipotenciales son cilindros. Asimismo, una línea de carga frente a un plano conductor muy extenso a potencial cero se sustituye por un cilindro conductor que satisface las condiciones dadas por la Ec. (174) y donde m es la

relación de las distancias de la línea de carga imagen y de la carga real al punto donde se va a evaluar el potencial eléctrico y el campo eléctrico.

3.12.7. Cilindro conductor de radio R a potencial $V = V_0$ frente a un plano conductor muy extenso a potencial cero.

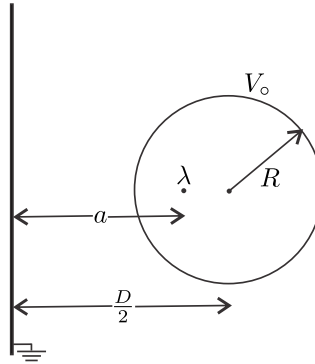


Figura 3.30 Cilindro conductor a potencial V_0 frente a un plano muy grande a potencial cero.

De la Ec.(3.152)) y de la Fig.3.29:

$$x_c = \frac{D}{2} = a \frac{m^2 + 1}{m^2 - 1} \quad y_c = 0 \quad R = \frac{2am}{m^2 - 1} \quad (3.156)$$

Si se soluciona el conjunto de Ecs.(3.156) para a y m , se obtiene:

$$a = \sqrt{\left(\frac{D}{2R}\right)^2 - R^2} \quad (3.157)$$

$$m = \frac{D}{2R} + \sqrt{\left(\frac{D}{2R}\right)^2 - 1} \quad (3.158)$$

a : ubicación de la línea de carga que reemplaza al cilindro.

m : es la relación de las distancias ya mencionada.

La densidad de carga longitudinal se obtiene así $\lambda = \frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{\ln m}$ y si se reemplaza en ésta el valor de m se obtiene:

$$\lambda = \frac{2\pi\epsilon_o V_o}{\ln \left[\frac{D}{2R} + \sqrt{\left(\frac{D}{2R}\right)^2 - 1} \right]} \quad (3.159)$$

Pero:

$$\ln \left[\frac{D}{2R} + \sqrt{\left(\frac{D}{2R}\right)^2 - 1} \right] = \operatorname{arccosh} \left(\frac{D}{2R} \right)$$

por lo tanto:

$$\lambda = \frac{2\pi\epsilon_o V_o}{\operatorname{arc} \cosh \left(\frac{D}{2R} \right)} \quad (3.160)$$

Las soluciones al potencial electrostático y campo electrostático están dadas por las Ecs.(3.127) y (3.139), las mismas de una línea de carga situada frente a un plano conductor muy extenso a potencial cero.

3.13. Ejemplos.

Ejemplo 4.

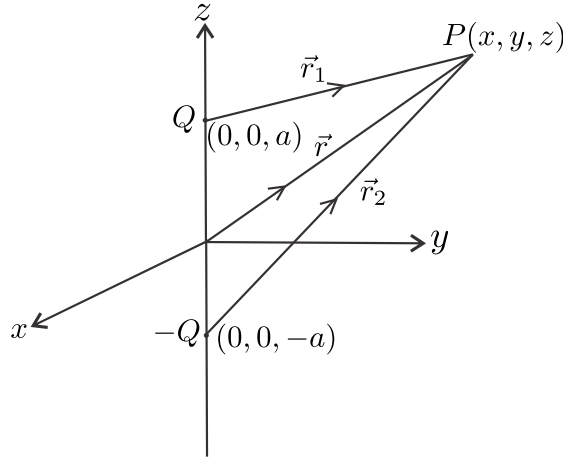


Figura 3.31 Cargas puntuales separadas una distancia $2a$.

Dos cargas de igual magnitud y naturaleza diferente se encuentran en $(0, 0, a)$ y $(0, 0, -a)$. Ver la Fig.3.31.

- Hallar el potencial y el campo eléctrico en (x, y, z) .
- Obtener el resultado en coordenadas cilíndricas.
- Obtener el resultado en coordenadas esféricas.
- Hallar el potencial eléctrico y el campo eléctrico para un dipolo.

SOLUCIÓN

$$a. \quad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\vec{r}_1 = x\vec{a}_x + y\vec{a}_y + (z - a)\vec{a}_z \rightarrow r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}$$

$$\vec{r}_2 = x\vec{a}_x + y\vec{a}_y + (z + a)\vec{a}_z \rightarrow r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2}$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2}} \right]$$

□

Si $z = 0$, entonces el plano xy se comporta como una superficie equipotencial a $0[V]$, pero debe tenerse presente que no es una superficie conductora.

$$\mathbb{E} = -\nabla V = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} \right)$$

$$\mathbb{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{x\vec{a}_x + y\vec{a}_y + (z-a)\vec{a}_z}{[x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{x\vec{a}_x + y\vec{a}_y + (z+a)\vec{a}_z}{[x^2 + y^2 + (z+a)^2]^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

□

En el plano xy :

$$\mathbb{E} = -\frac{2aQ}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{a}_z$$

b. Se sabe que en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{r}_c = x\vec{a}_x + y\vec{a}_y \rightarrow r_c = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Por lo tanto:

$$\vec{r}_1 = r_c\vec{a}_r + (z-a)\vec{a}_z \rightarrow r_1 = \sqrt{r_c^2 + (z-a)^2}$$

$$\vec{r}_2 = r_c\vec{a}_r + (z+a)\vec{a}_z \rightarrow r_2 = \sqrt{r_c^2 + (z+a)^2}$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r_c^2 + (z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_c^2 + (z+a)^2}} \right]$$

□

$$\mathbb{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{r_c\vec{a}_r + (z-a)\vec{a}_z}{[r_c^2 + (z-a)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{r_c\vec{a}_r + (z+a)\vec{a}_z}{[r_c^2 + (z+a)^2]^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

□

c. Se sabe que en coordenadas esféricas:

$$\vec{r}_e = x\vec{a}_x + y\vec{a}_y + z\vec{a}_z \rightarrow r_e = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{r}_1 = r_e\vec{a}_r - a\vec{a}_z \rightarrow \vec{r}_1 = (r_e - a\cos\theta)\vec{a}_r + a\sin\theta\vec{a}_\theta$$

$$r_1 = \sqrt{a^2 - 2ar_e\cos\theta + r_e^2}$$

$$\vec{r}_2 = r_e\vec{a}_r + a\vec{a}_z \rightarrow \vec{r}_2 = (r_e + a\cos\theta)\vec{a}_r - a\sin\theta\vec{a}_\theta$$

$$r_2 = \sqrt{a^2 + 2ar_e\cos\theta + r_e^2}$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 - 2ar_e\cos\theta + r_e^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + 2ar_e\cos\theta + r_e^2}} \right]$$

□

$$\mathbb{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(r_e - a\cos\theta)\vec{a}_r + a\sin\theta\vec{a}_\theta}{(a^2 - 2ar_e\cos\theta + r_e^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(r_e + a\cos\theta)\vec{a}_r - a\sin\theta\vec{a}_\theta}{(a^2 + 2ar_e\cos\theta + r_e^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

□

d. En el caso del dipolo eléctrico $r \gg a$:

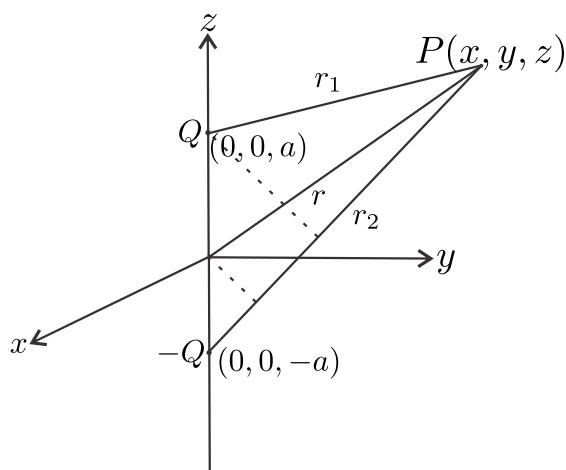


Figura 3.32 Representación gráfica del dipolo.

$$\cos\theta \approx \frac{r_2 - r_1}{2a} \rightarrow r_2 - r_1 \approx 2a\cos\theta$$

$$V = \frac{\vec{p} \cdot \vec{a}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \square$$

El campo electrostático, se obtiene a partir del gradiente negativo del potencial escalar eléctrico.

$$\mathbb{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left[\vec{p} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] \quad \square$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\cos\theta}{r^3} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin\theta}{r^3}$$

$$\mathbb{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2\cos\theta \vec{a}_r + \sin\theta \vec{a}_\theta) \quad \square$$

Ejemplo 5.

Un segmento de línea L que tiene una densidad de carga longitudinal constante λ , está situado simétricamente con respecto al plano xy :

- hallar el potencial y campo eléctrico en el punto $P(x, y, z)$
- a partir del resultado del literal a., hallar el potencial y campo eléctrico debido a una línea que tiene una densidad de carga longitudinal constante λ .

SOLUCIÓN:

A continuación, se obtendrá el potencial electrostático a partir de la expresión

analítica del potencial eléctrico: $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{dQ}{R}$

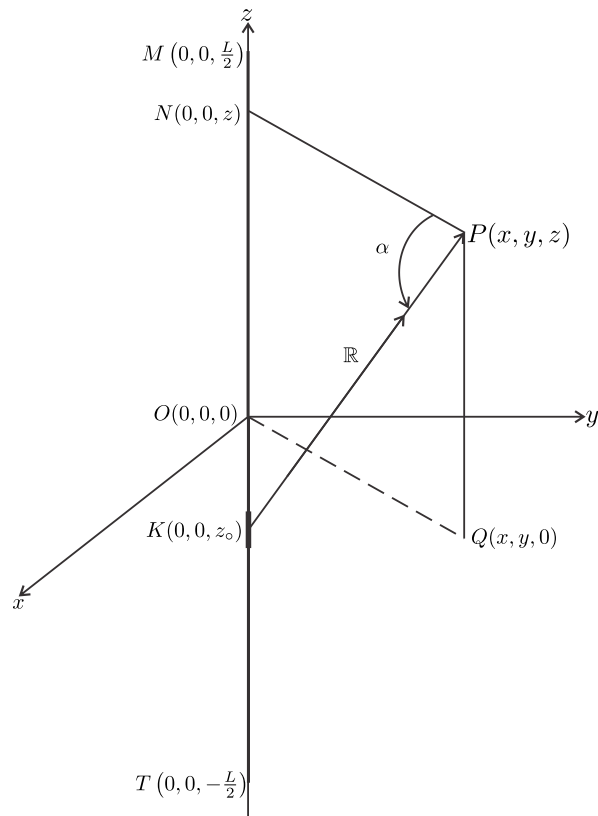


Figura 3.33 Problema 5

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &= x\vec{a}_x + y\vec{a}_y + (z - z_o)\vec{a}_z & \mathbb{R} &= r\vec{a}_r + (z - z_o)\vec{a}_z & R &= \sqrt{r^2 + (z - z_o)^2} \\ dQ &= \lambda dz_o \end{aligned}$$

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dz_0}{\sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}}$$

$$z - z_o = r \tan \alpha \quad -dz_o = r \sec^2 \alpha d\alpha \quad \sqrt{r^2 + (z - z_o)^2} = \sqrt{r^2 \sec^2 \alpha} = r \sec \alpha$$

$$V = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{r \sec^2 \alpha d\alpha}{r \sec \alpha} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \sec \alpha d\alpha$$

$$V = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \sec\alpha \frac{\sec\alpha + \tan\alpha}{\tan\alpha + \sec\alpha} d\alpha = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln(\tan\alpha + \sec\alpha)$$

$$V = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left| \frac{z - z_0 + \sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}}{r} \right|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{z + \frac{L}{2} + \sqrt{r^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}}{z - \frac{L}{2} + \sqrt{r^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}}$$

O, también:

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\operatorname{arcsenh} \frac{z + \frac{L}{2}}{r} - \operatorname{arcsenh} \frac{z - \frac{L}{2}}{r} \right)$$

Por lo tanto:

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{z + \frac{L}{2} + \sqrt{r^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}}{z - \frac{L}{2} + \sqrt{r^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\operatorname{arcsenh} \frac{z + \frac{L}{2}}{r} - \operatorname{arcsenh} \frac{z - \frac{L}{2}}{r} \right) \quad \square$$

A continuación se obtendrá el campo electrostático a partir del gradiente negativo de la función potencial escalar electrostática.

$$\mathbb{E} = -\nabla V = - \left[\frac{\partial V}{\partial r} \vec{a}_r + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{a}_z \right]$$

$$\text{a. } V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{z + \frac{L}{2} + \sqrt{r^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}}{z - \frac{L}{2} + \sqrt{r^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}}$$

$$u = z + \frac{L}{2} + \sqrt{r^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2} \quad v = z - \frac{L}{2} + \sqrt{r^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}$$

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{u}{v} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln uv^{-1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial r} \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\frac{\partial V}{\partial u} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 u} \quad \frac{\partial V}{\partial v} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 v}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 1 + \frac{1}{2} \frac{2\left(z + \frac{L}{2}\right)}{\sqrt{r^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}} = \frac{u}{\sqrt{r^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}} \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{v}{\sqrt{r^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\lambda r}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{u\sqrt{r^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}} - \frac{1}{v\sqrt{r^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}} \right] \quad (3.161)$$

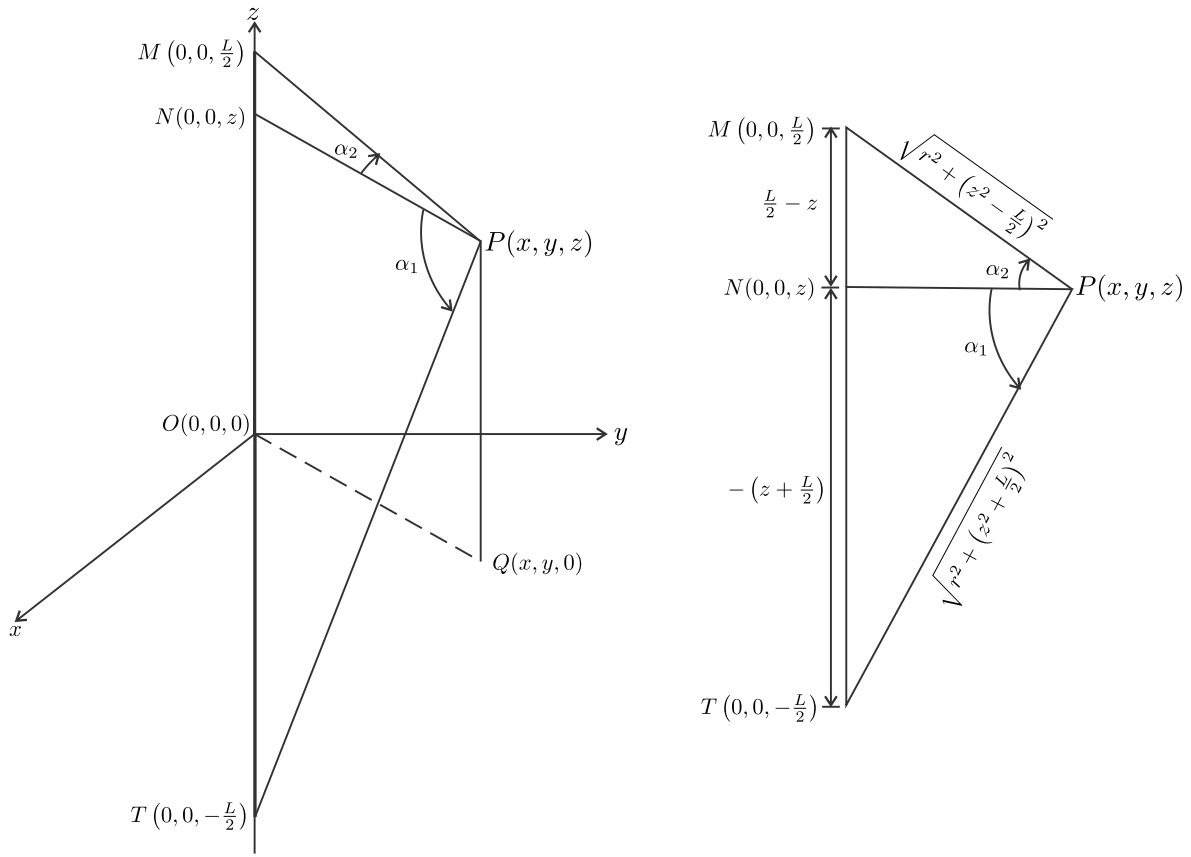
$$\begin{aligned}
\text{i. } \frac{1}{u\sqrt{r^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}} &= \frac{1}{\left[z + \frac{L}{2} + \sqrt{r^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}\right] \sqrt{r^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}} = \\
&= \frac{z + \frac{L}{2} - \sqrt{r^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}}{\left[z + \frac{L}{2} + \sqrt{r^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}\right] \left[z + \frac{L}{2} - \sqrt{r^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}\right] \sqrt{r^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}} = \\
&= \frac{z + \frac{L}{2} - \sqrt{r^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}}{-r^2 \sqrt{r^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}} = \frac{1}{r^2} \left[1 - \frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{r^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}} \right] \\
\text{ii. } -\frac{1}{v\sqrt{r^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}} &= -\frac{1}{\left[z - \frac{L}{2} + \sqrt{r^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}\right] \sqrt{r^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}} = \\
&= -\frac{z - \frac{L}{2} - \sqrt{r^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}}{\left[z - \frac{L}{2} + \sqrt{r^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}\right] \left[z - \frac{L}{2} - \sqrt{r^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}\right] \sqrt{r^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}} = \\
&= -\frac{z - \frac{L}{2} - \sqrt{r^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}}{-r^2 \sqrt{r^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{r^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}} - 1 \right]
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{r^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}} - \frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{r^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}} \right] \quad (3.162)$$

$$\text{iii. } \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial z} \longrightarrow \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{u} \frac{u}{\sqrt{r^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}} - \frac{1}{v} \frac{v}{\sqrt{r^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}} \right]$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}} \right] \quad (3.163)$$


 Figura 3.34 Cálculo de los ángulos α_1 y α_2

De los triángulos PNM y PNT situados a la derecha en la Fig.3.33 se obtienen:

$$\cos\alpha_1 = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}} \quad \text{sen}\alpha_1 = -\frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{r^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}}$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}} \quad \text{sen}\alpha_2 = -\frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{r^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} (-\text{sen}\alpha_1 + \text{sen}\alpha_2) \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} [\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1]$$

$$\mathbb{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} [(\text{sen}\alpha_2 - \text{sen}\alpha_1) \vec{a}_r + (\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) \vec{a}_z] \quad (3.164)$$

$$\text{b. } V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\operatorname{arcsenh} \frac{z + \frac{L}{2}}{r} - \operatorname{arcsenh} \frac{z - \frac{L}{2}}{r} \right)$$

$$u = \frac{z + \frac{L}{2}}{r} \quad v = \frac{z - \frac{L}{2}}{r} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{r}$$

$$\text{Entonces: } V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} (\operatorname{arcsenh} u - \operatorname{arcsenh} v)$$

$$\text{i. } \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial r}$$

$$\frac{\partial V}{\partial u} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} \quad \frac{\partial V}{\partial v} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{v^2 + 1}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{z + \frac{L}{2}}{r^2} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{z - \frac{L}{2}}{r^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{\sqrt{v^2 + 1}} \frac{\partial v}{\partial r} \right]$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}} \left(-\frac{z + \frac{L}{2}}{r^2} \right) - \frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}} \left(-\frac{z - \frac{L}{2}}{r^2} \right) \right]$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{r^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}} - \frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{r^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}} \right]$$

$$\text{ii. } \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{\sqrt{v^2 + 1}} \frac{\partial v}{\partial z} \right]$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \left[-\frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}} + \frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}} \right]$$

$$\mathbb{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} [(\operatorname{sen}\alpha_2 - \operatorname{sen}\alpha_1) \vec{a}_r + (\operatorname{cos}\alpha_2 - \operatorname{cos}\alpha_1) \vec{a}_z] \quad (3.165)$$

CASO ESPECIAL.

A partir de la Ec. (3.165), deducir el campo eléctrico y potencial eléctrico de una

línea.

En este caso $\alpha_1 \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ y $\alpha_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Por lo tanto:

$$\mathbb{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} 2\vec{a}_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{a}_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}$$

$$dV = -\mathbb{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{a}_r \cdot (dr\vec{a}_r + r d\varphi \vec{a}_\varphi + dz\vec{a}_z)$$

$$dV = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r} \rightarrow V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C$$

$$\text{Si } r = R_o \rightarrow V = 0 \rightarrow 0 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln R_o + C \rightarrow C = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln R_o$$

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_o}{r} \quad \mathbb{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{a}_r$$

□

Si $V = 0$ en $R_o = 1$, se obtiene $V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{r}$

Ejemplo 6.

Una espira circular de radio a tiene una densidad de carga longitudinal λ se halla en el plano $z = z_o$, ver Fig. 3.35. Hallar:

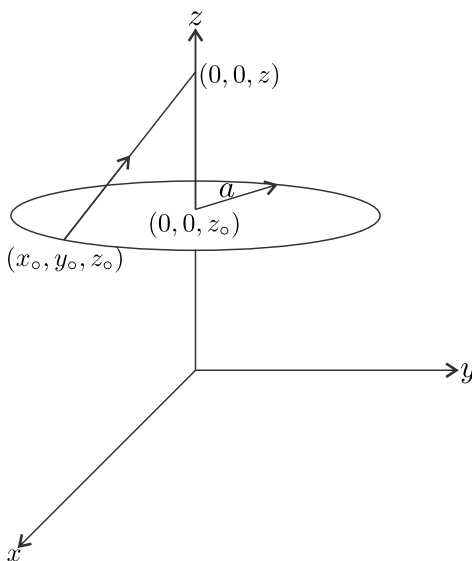


Figura 3.35 Espira circular de radio a que tiene una densidad de carga longitudinal λ constante.

a. el campo eléctrico en $(0, 0, z)$, $z > z_o$

- b. el campo eléctrico en $(0, 0, z_o)$ a partir de expresión obtenida en el literal a.
 c. el campo eléctrico en un punto muy lejano usando el resultado obtenido en el literal b.

Solución

$$r_o = a \quad 0 < \varphi_o < 2\pi \quad -\frac{L}{2} < z_o < \frac{L}{2}$$

$$a. \quad dQ = \lambda d\ell_o = a\lambda d\varphi_o$$

$$\mathbb{R} = -a\vec{a}_r + (z - z_o)\vec{a}_z \rightarrow R = \sqrt{a^2 + (z - z_o)^2}$$

$$\mathbb{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_0^{2\pi} \frac{a\lambda [-a\vec{a}_r + (z - z_o)\vec{a}_z]}{[a^2 + (z - z_o)^2]^{\frac{3}{2}}} d\varphi_o$$

$$\mathbb{E} = \frac{a\lambda}{4\pi\epsilon_o [a^2 + (z - z_o)^2]^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} [-a\vec{a}_r + (z - z_o)\vec{a}_z] d\varphi_o$$

$$\mathbb{E} = \frac{a\lambda}{4\pi\epsilon_o [a^2 + (z - z_o)^2]^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} [-a(\cos\varphi\vec{a}_x + \sin\varphi\vec{a}_y) + (z - z_o)\vec{a}_z] d\varphi_o$$

$$\mathbb{E} = \frac{a(z - z_o)\lambda}{2\epsilon_o [a^2 + (z - z_o)^2]^{\frac{3}{2}}} \vec{a}_z = \frac{Q(z - z_o)}{4\pi\epsilon_o [a^2 + (z - z_o)^2]^{\frac{3}{2}}} \vec{a}_z \quad \square$$

$$\text{ya que } \lambda = \frac{Q}{2\pi a}.$$

- b. En este caso $z = z_o$

Por lo tanto, reemplazando en la expresión obtenida en el literal a, se tiene:

$$\mathbb{E} = 0 \quad \square$$

- b. Si el punto donde se va a evaluar el campo eléctrico se encuentra muy alejado de la fuente, $z \gg a$ y $z \gg z_o$, el campo electrostático toma el siguiente valor:

$$\mathbb{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o z^2} \vec{a}_z$$

Se nota que si desde un punto muy lejano se observa la espira que tiene una densidad longitudinal de carga λ , se comporta como una carga puntual. $\square$

Ejemplo 7.

Un plano muy grande tiene una densidad de carga superficial σ constante, se encuentra en el plano $z = z_o$. Hallar el campo eléctrico en $(0, 0, z)$, ver Fig. 3.36.

SOLUCIÓN

$$\mathbb{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{dQ}{R^3} \mathbb{R}$$

$$dQ = \sigma dS = \sigma r dr d\varphi \quad \mathbb{R} = -r\vec{a}_r + z\vec{a}_z \quad R = \sqrt{r^2 + z^2}$$

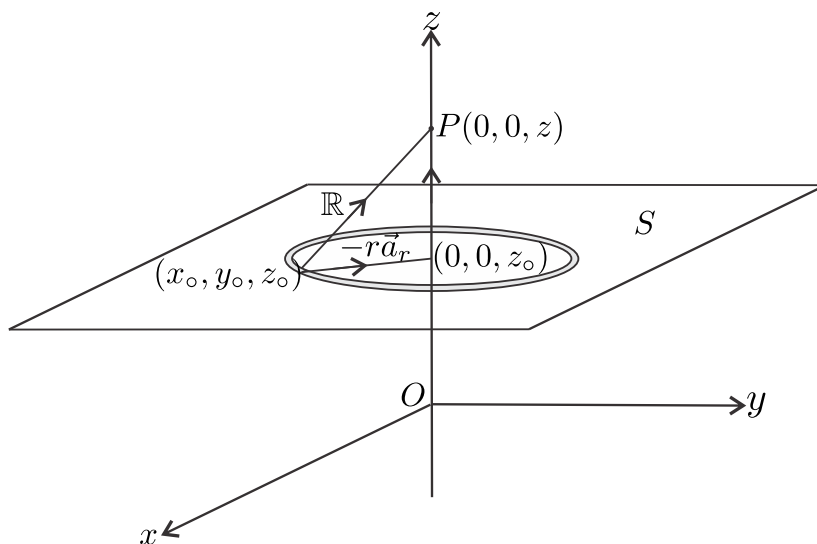


Figura 3.36 Ejemplo 7.

$$\mathbb{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\sigma r dr d\varphi}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (-r\vec{a}_r + z\vec{a}_z)$$

$$\mathbb{E} = \frac{2\pi\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{a}_z$$

$$\mathbb{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{a}_z$$

□

Ejemplo 8.

Un disco de radio a tiene una densidad de carga superficial σ constante, se encuentra en el plano $z = z_o$. Hallar el potencial eléctrico y el campo eléctrico en $(0, 0, z)$, ver Fig.3.37.

SOLUCIÓN

$$dQ = \sigma dS = \sigma r_o dr_o d\varphi_o \quad \mathbb{R} = -r_o\vec{a}_r + (z - z_o)\vec{a}_z \quad R = \sqrt{r_o^2 + (z - z_o)^2}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{dQ}{R} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{r_o dr_o d\varphi_o}{[r_o^2 + (z - z_o)^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{r_o dr_o}{[r_o^2 + (z - z_o)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$u^2 = r_o^2 + (z - z_o)^2 \rightarrow r_o dr_o = u du$$

$$r = 0 \quad u_o = z - z_o$$

$$r = a \quad u_a = \sqrt{a^2 + (z - z_o)^2}$$

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} \int_0^a \frac{r_o dr_o}{[r_o^2 + (z - z_o)^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} \int_{u_o}^{u_a} \frac{u du}{u}$$

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} \left[\sqrt{a^2 + (z - z_o)^2} - (z - z_o) \right]$$

□

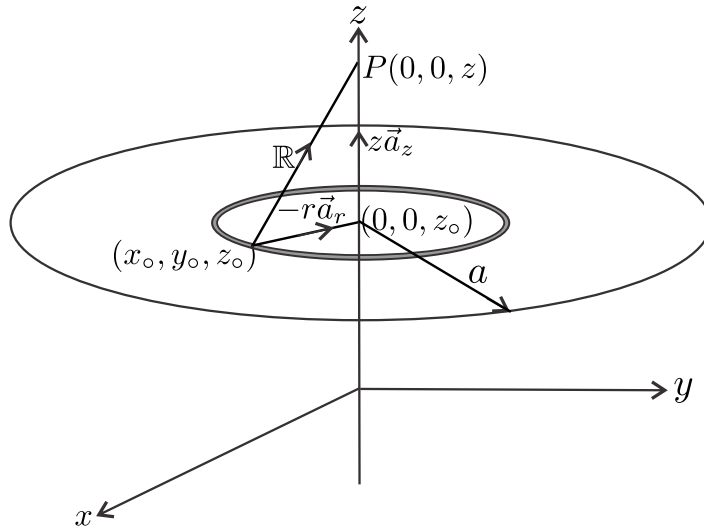


Figura 3.37 Espira circular de radio a que tiene una densidad de carga longitudinal constante λ .

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} \left[\frac{z - z_o}{\sqrt{a^2 + (z - z_o)^2}} - 1 \right]$$

$$\mathbb{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} \left[1 - \frac{z - z_o}{\sqrt{a^2 + (z - z_o)^2}} \right] \vec{a}_z$$

□

Otro método para obtener el campo electrostático, es mediante la expresión analítica de éste:

$$\mathbb{E} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_o} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{[-r_o \vec{a}_r + (z - z_o) \vec{a}_z] r_o dr_o d\varphi_o}{[r_o^2 + (z - z_o)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E} &= \frac{(z - z_o) \sigma}{2\varepsilon_o} \int_0^a \frac{r_o dr_o}{[r_o^2 + (z - z_o)^2]^{\frac{3}{2}}} \vec{a}_z \\ \int_0^a \frac{r_o dr_o}{[r_o^2 + (z - z_o)^2]^{\frac{3}{2}}} &\rightarrow \begin{cases} u^2 = r_o^2 + (z - z_o)^2 & \rightarrow r_o dr_o = u du \\ r_o = 0 & \rightarrow u_o = z - z_o \\ r_o = a & \rightarrow u_a = \sqrt{a^2 + (z - z_o)^2} \end{cases} \\ \mathbb{E} &= \frac{(z - z_o) \sigma}{2\varepsilon_o} \int_{u_o}^{u_a} \frac{u du}{u^3} = \frac{(z - z_o) \sigma}{2\varepsilon_o} \int_{u_o}^{u_a} \frac{du}{u^2} \vec{a}_z = \frac{(z - z_o) \sigma}{2\varepsilon_o} \frac{1}{u} \Big|_{u_o}^{u_a} \vec{a}_z \\ \mathbb{E} &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} \left[1 - \frac{z - z_o}{\sqrt{a^2 + (z - z_o)^2}} \right] \vec{a}_z \quad \square\end{aligned}$$

Ejemplo 9.

Hallar el campo eléctrico en $(0, 0, z)$ debido a una distribución de carga volumétrica constante ρ en una esfera de radio a , $z > a$. Ver Fig. 3.38.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\mathbb{E} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int_{\tau} \frac{dQ}{R^3} \mathbb{R} \\ dQ &= \rho d\tau = \rho r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi \quad \mathbb{R} = -r\vec{a}_r + z\vec{a}_z \quad \vec{a}_z = \cos\theta\vec{a}_r - \sin\theta\vec{a}_\theta \\ \mathbb{R} &= (z \cos\theta - r) \vec{a}_r - z \sin\theta \vec{a}_\theta \\ \text{ya que } \vec{a}_r &= \sin\theta \cos\varphi \vec{a}_x + \sin\theta \sin\varphi \vec{a}_y + \cos\theta \vec{a}_z \\ \mathbb{R} &= -r \sin\theta \cos\varphi \vec{a}_x - r \sin\theta \sin\varphi \vec{a}_y + (z - r \cos\theta) \vec{a}_z\end{aligned}$$

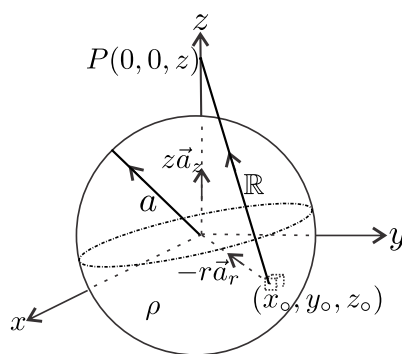


Figura 3.38 Esfera de radio a que tiene una densidad de carga volumétrica constante.

$$R = \sqrt{z^2 + r^2 - 2zr \cos\theta}$$

$$\mathbb{E} = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a \frac{(-r\vec{a}_r + z\vec{a}_z) r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi}{(z^2 + r^2 - 2zr \cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int_0^{2\pi} [-r \sin\theta \cos\varphi \vec{a}_x - r \sin\theta \sin\varphi \vec{a}_y + (z - r \cos\theta) \vec{a}_z] d\varphi = 2\pi (z - r \cos\theta) \vec{a}_z$$

$$\mathbb{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^a \frac{(z - r \cos\theta) r^2 dr \sin\theta d\theta}{(z^2 + r^2 - 2zr \cos\theta)^{\frac{3}{2}}} \vec{a}_z$$

$$t^2 = z^2 + r^2 - 2zr \cos\theta \rightarrow t dt = zr \sin\theta d\theta \rightarrow \sin\theta d\theta = \frac{t dt}{zr}$$

$$t^2 = z^2 + r^2 - 2zr \cos\theta \rightarrow r \cos\theta = \frac{z^2 + r^2 - t^2}{2z}$$

$$z - r \cos\theta = z - \frac{z^2 + r^2 - t^2}{2z} \rightarrow z - r \cos\theta = \frac{z^2 - r^2 + t^2}{2z}$$

$$t^2 = z^2 + r^2 - 2zr \cos\theta \rightarrow \begin{cases} \theta = 0 \rightarrow t_o = z - r \\ \theta = \pi \rightarrow t_\pi = z + r \end{cases}$$

$$\mathbb{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^a r^2 dr \int_{t_o}^{t_\pi} \frac{t (z^2 - r^2 + t^2) dt}{2r z^2 t^3} \vec{a}_z = \frac{\rho}{4\epsilon_0 z^2} \int_0^a r dr \int_{t_o}^{t_\pi} \left[\frac{z^2 - r^2}{t^2} + 1 \right] dt \vec{a}_z$$

$$\mathbb{E} = \frac{\rho}{4\epsilon_0 z^2} \int_0^a r dr \left\{ \frac{r^2 - z^2}{t} + t \right\} \Big|_{z-r}^{z+r} \vec{a}_z = \frac{\rho}{\epsilon_0 z^2} \int_0^a r^2 dr \vec{a}_z$$

$$\mathbb{E} = \frac{a^3 \rho}{3\epsilon_0 z^2} \vec{a}_z$$

□

Otra forma de solucionar el problema es mediante las ecuaciones de Poisson y Laplace:

$$\text{a.} \quad \nabla^2 V_1 = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad r < a$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV_1}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV_1}{dr} \right) = -\frac{\rho r^2}{\epsilon_0}$$

$$\frac{dV_1}{dr} = -\frac{\rho r}{3\epsilon_0} + \frac{k_1}{r^2} \rightarrow V_1 = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} - \frac{k_1}{r} + k_2$$

$$\mathbb{E}_1 = \left(\frac{\rho r}{3\epsilon_0} - \frac{k_1}{r^2} \right) \vec{a}_r$$

$$\text{b.} \quad \nabla^2 V_2 = 0 \quad r > a$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV_2}{dr} \right) = 0 \rightarrow \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV_2}{dr} \right) = 0$$

$$\frac{dV_2}{dr} = \frac{k_3}{r^2} \rightarrow V_2 = -\frac{k_3}{r} + k_4$$

$$\mathbb{E}_2 = -\frac{k_3}{r^2} \vec{a}_r$$

Para determinar las constantes se procede a aplicar las condiciones de frontera:

i. Si $r \rightarrow \infty \rightarrow V_2 = 0$

$$0 = -\frac{k_3}{\infty} + k_4 \rightarrow k_4 = 0$$

Por lo tanto: $V_2 = -\frac{k_3}{r}$ $\mathbb{E}_2 = -\frac{k_3}{r^2} \vec{a}_r$

ii. Si $r \rightarrow 0 \rightarrow V_1$ debe ser finito!

$$V_1 = -\frac{\rho 0}{6\varepsilon_0} - \frac{k_1}{0} + k_2, \text{ entonces } k_1 = 0$$

Por lo tanto: $V_1 = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + k_2$ $\mathbb{E}_1 = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \vec{a}_r$

iii. Si $r = a \rightarrow V_1 = V_2$

$$-\frac{\rho a^2}{6\varepsilon_0} + k_2 = -\frac{k_3}{a}$$

iv. Si $r = a$ $\mathbb{E}_1 = \mathbb{E}_2$

$$\frac{\rho r}{3\varepsilon_0} = -\frac{k_3}{a^2} \rightarrow k_3 = -\frac{a^3 \rho}{3\varepsilon_0}$$

$$-\frac{k_3}{a} = \frac{a^2 \rho}{3\varepsilon_0} \rightarrow k_2 = \frac{a^2 \rho}{6\varepsilon_0} + \frac{a^2 \rho}{3\varepsilon_0} = \frac{a^2 \rho}{2\varepsilon_0}$$

$$V_1 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left(a^2 - \frac{r^2}{3} \right) \quad \mathbb{E}_1 = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \vec{a}_r$$

$$V_2 = \frac{a^3 \rho}{3\varepsilon_0 r} \quad \mathbb{E}_2 = \frac{a^3 \rho}{3\varepsilon_0 r^2} \vec{a}_r$$

□

Otra solución al problema se obtiene aplicando el Teorema de Gauss. De la Fig. 3.39:

$r > a$:

$$\oint_S \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_o} = \frac{1}{\varepsilon_o} \int_{\tau} \rho d\tau = \frac{4\pi a^3 \rho}{3\varepsilon_o}$$

$$\mathbb{E} = E\vec{a}_r \quad d\mathbb{S} = dS\vec{a}_r \quad \oint_S \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = E4\pi r^2$$

$$E4\pi r^2 = \frac{4\pi a^3 \rho}{3\varepsilon_o} \quad E = \frac{a^3 \rho}{3\varepsilon_o r^2}$$

$$\mathbb{E} = \frac{a^3 \rho}{3\varepsilon_o r^2} \vec{a}_r$$

□

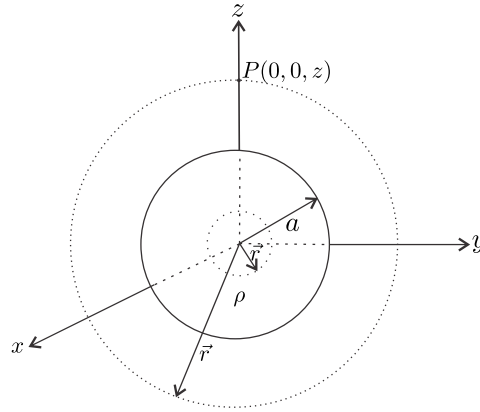


Figura 3.39 Método del Teorema de Gauss.

$$dV = -\mathbb{E} \cdot d\vec{\ell} \rightarrow dV = -\mathbb{E} \cdot dr\vec{a}_r \rightarrow dV = -\frac{a^3 \rho}{3\varepsilon_o} \frac{\vec{a}_r \cdot dr\vec{a}_r}{r^2}$$

$$\int_V^0 dV = -\frac{a^3 \rho}{3\varepsilon_o} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} \rightarrow V = \frac{a^3 \rho}{3\varepsilon_o r}$$

□

 $r < a :$

$$\oint_S \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = E4\pi r^2 \quad Q = \frac{4\pi r^3 \rho}{3} \quad E4\pi r^2 = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\varepsilon_o}$$

$$\mathbb{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_o} \vec{a}_r$$

□

$$V_a = \left. \frac{a^3 \rho}{3\varepsilon_o r} \right|_{r=a} = \frac{a^2 \rho}{3\varepsilon_o}$$

$$\int_{V_a}^V dV = -\frac{\rho}{3\varepsilon_o} \int_a^r r dr \rightarrow V = \frac{\rho}{2\varepsilon_o} \left(a^2 - \frac{r^2}{3} \right)$$

□

Ejemplo 10.

Un protón se lanza en dirección perpendicular a una línea que pasa por dos protones fijos separados una distancia $2h$. ¿En qué punto de la trayectoria la fuerza que se ejerce sobre el protón en movimiento es máxima?

SOLUCIÓN

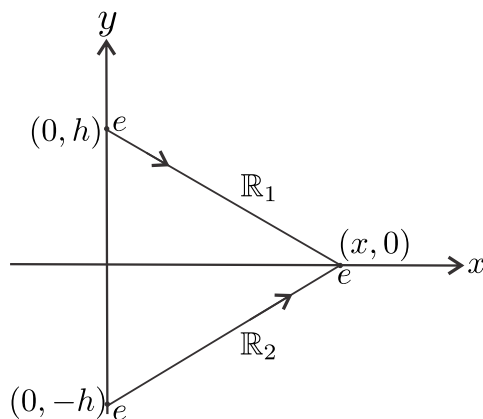


Figura 3.40 Ejemplo 10.

$$\mathbb{F}_2 = \mathbb{F}_{21} + \mathbb{F}_{23}$$

$$\mathbb{R}_1 = x\vec{a}_x - h\vec{a}_y \quad R_1 = \sqrt{x^2 + h^2}$$

$$\mathbb{R}_2 = x\vec{a}_x + h\vec{a}_y \quad R_2 = \sqrt{x^2 + h^2}$$

$$\mathbb{F}_{21} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\vec{a}_x - h\vec{a}_y}{(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \mathbb{F}_{23} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\vec{a}_x + h\vec{a}_y}{(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathbb{F}_2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2x}{(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{a}_x = 2k \frac{x}{(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{a}_x$$

$$\text{donde } k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\frac{dF_2}{dx} = 2k \frac{h^2 - 2x^2}{(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Para hallar en qué punto de la trayectoria la fuerza es máxima o mínima, la primera derivada de la fuerza con respecto a x se hace cero.

$$\frac{dF_2}{dx} = 0 \rightarrow x = \frac{h\sqrt{2}}{2}$$

Mediante la prueba de la segunda derivada, se determina si el valor de x , obtenido anteriormente corresponde a un máximo o a un mínimo.

$$\frac{d^2 F_2}{dx^2} = -6k \frac{(3h^2 - 2x^2)x}{(x^2 + h^2)^{\frac{7}{2}}} \longrightarrow \left. \frac{d^2 F_2}{dx^2} \right|_{x=\frac{h\sqrt{2}}{2}} < 0$$

La fuerza será máxima ya que la segunda derivada es menor que cero. $\square$

Ejemplo 11.

Un aparato sencillo para medir carga eléctrica se compone de dos esferas pequeñas, una fija y otra móvil, sujeta esta última a la fuerza restauradora de un resorte $F = ky$, donde k es la constante del resorte. Las esferas descargadas se colocan en $y = 0$ y $y = d$, estando ésta fija. Si las esferas tienen la misma magnitud de carga y naturaleza diferente Q , obtener ésta en función de y . Determinar la máxima carga medible en función de ε_o , k y d .

SOLUCIÓN

$$\mathbb{F}_e + \mathbb{F}_R = 0 \rightarrow \mathbb{F}_e = -\mathbb{F}_R$$

$$\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o(d-y)^2} = ky$$

$$Q = 2\sqrt{k\pi\varepsilon_o(d-y)}\sqrt{y} \quad (3.166)$$

$$\frac{dQ}{dy} = \frac{d-3y}{\sqrt{y}}\sqrt{\pi\varepsilon_o k}$$

Para hallar la carga máxima, la primera derivada de la carga con respecto a y se hace cero.

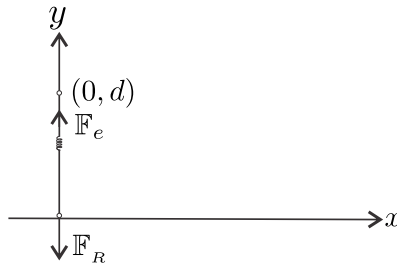


Figura 3.41 Ejemplo 11.

$$\frac{dQ}{dy} = 0 \longrightarrow y = \frac{d}{3}$$

Si el valor anterior se remplaza en la Ec. (3.166), se obtiene la carga máxima medible.

$$Q_{Máx} = \frac{4d}{3} \sqrt{\frac{kd\pi\epsilon_0}{3}}$$

□

¿Qué ocurre si $Q > Q_{Máx}$?

Ejemplo 12.

Dos esferas pequeñas conductoras e idénticas, tienen cargas de $2,0 \times 10^{-9} [C]$ y $-0,5 \times 10^{-9} [C]$, respectivamente. Cuando se colocan a $4 [cm]$ una de la otra, ¿cuál es la fuerza entre ellas?. Si se ponen en contacto y luego se separan $9 [cm]$ ¿cuál será la fuerza entre ellas?

SOLUCIÓN

$$\mathbb{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2,0 \times 10^{-9} (-0,5 \times 10^{-9})}{(4 \times 10^{-2})^2} \vec{a}_x$$

$$\mathbb{F}_{21} = -5,625 \times 10^{-6} [Nw]$$

□

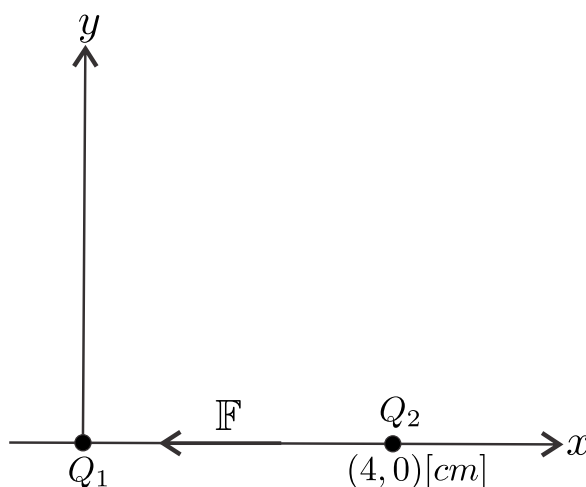


Figura 3.42 Ejemplo 12.

Si las esferas se juntan, de la esfera cuyo potencial es mayor pasa carga a la de menor potencial, en otras palabras, de la que tiene más carga a la de menos. El proceso termina cuando ambas están al mismo potencial.

Q : Carga que pasa de la esfera de mayor carga a la otra.

$2,0 \times 10^{-9} - Q$: Carga final en una esfera después de contactarla

$-0,5 \times 10^{-9} + Q$: Carga final en la otra esfera después de contactarla

$$\frac{2,0 \times 10^{-9} - Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{-0,5 \times 10^{-9} + Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$Q = 1,25 \times 10^{-9} [C]$$

Carga final en cada esfera:

$$2,0 \times 10^{-9} - Q = 0,75 \times 10^{-9} \quad y \quad 0,5 \times 10^{-9} + Q = 0,75 \times 10^{-9}$$

$$\mathbb{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{0,75 \times 10^{-9} (0,75 \times 10^{-9})}{(9 \times 10^{-2})^2} \vec{a}_x$$

$$\mathbb{F}_{21} = 3,16 \times 10^{-6} \vec{a}_x [Nw]$$

□

Ejemplo 13.

Una línea de carga semi-infinita sobre el eje z , tiene una densidad de carga longitudinal $\lambda = -\frac{a}{1-z}$, siendo a una constante. Determinar el campo eléctrico en $(0, 0, h)$.

SOLUCIÓN

$$\mathbb{R} = (h - z) \vec{a}_z \quad R = h - z$$

$$dQ = \lambda dz \quad dQ = -\frac{adz}{1-z}$$

$$\mathbb{E} = -\frac{a}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\ell}^0 \frac{dz}{(1-z)(h-z)^2} \vec{a}_z$$

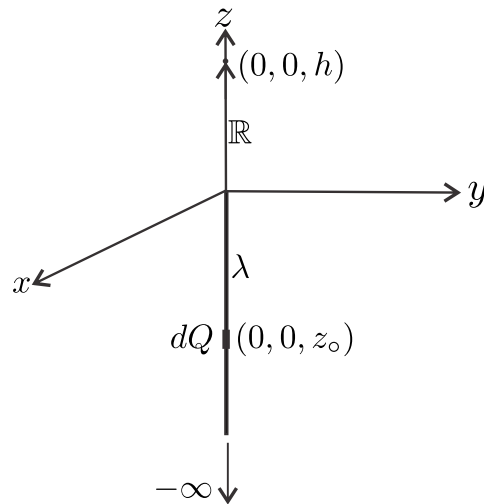


Figura 3.43 Línea de carga semi-infinita.

La integral se resuelve mediante el método de las fracciones parciales.

$$\frac{1}{(1-z)(h-z)^2} = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{h-z} + \frac{C}{(h-z)^2}$$

$$\frac{1}{(h-z)^2} = A + \frac{B(1-z)}{h-z} + \frac{C(1-z)}{(h-z)^2}$$

Se evalúa para $z = 1$. Así:

$$A = \frac{1}{(h-1)^2} \quad \square$$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{A(h-z)^2}{1-z} + B(h-z) + C$$

Se evalúa para $z = h$. Entonces:

$$C = \frac{1}{1-h} \quad \square$$

$$1 = A(h-z)^2 + (1-z)B(h-z) + (1-z)C$$

Se deriva con respecto a z :

$$0 = 2(h-z)A + (h-2z+1)B + C$$

Se remplazan los valores de A y C :

$$2\frac{h-z}{(h-1)^2} + (h-2z+1)B + \frac{1}{1-h} = 0$$

se evalúa para $z = h$:

$$(1-h)B + \frac{1}{1-h} = 0 \rightarrow B = -\frac{1}{(h-1)^2} \quad \square$$

$$\frac{1}{(1-z)(h-z)^2} = \frac{1}{(h-1)^2} \left[\frac{1}{1-z} - \frac{1}{h-z} \right] + \frac{1}{1-h} \frac{1}{(h-z)^2}$$

$$\int_{-\ell}^0 \frac{dz}{(1-z)(h-z)^2} = \frac{1}{(h-1)^2} \int_{-\ell}^0 \left[\frac{1}{1-z} - \frac{1}{h-z} \right] dz + \frac{1}{1-h} \int_{-\ell}^0 \frac{dz}{(h-z)^2}$$

$$\int_{-\ell}^0 \frac{dz}{1-z} = \ln(1+\ell)$$

$$\int_{-\ell}^0 \frac{dz}{h-z} = \ln \frac{h+\ell}{h}$$

$$\int_{-\ell}^0 \frac{dz}{(h-z)^2} = \frac{\ell}{h(h+\ell)}$$

$$\int_{-\ell}^0 \frac{dz}{(1-z)(h-z)^2} = \frac{1}{(h-1)^2} \left[\ln(1+\ell) - \ln \frac{h+\ell}{h} \right] + \frac{1}{1-h} \frac{\ell}{h(h+\ell)}$$

$$\int_{-\ell}^0 \frac{dz}{(1-z)(h-z)^2} = \frac{1}{(h-1)^2} \ln \frac{(1+\ell)h}{h+\ell} + \frac{1}{1-h} \frac{\ell}{h(h+\ell)}$$

Para la línea semi-infinita:

$$\int_{-\ell}^0 \frac{dz}{(1-z)(h-z)^2} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(h-1)^2} \ln \frac{\ell \left(\frac{1}{\ell} + 1 \right) h}{\ell \left(\frac{h}{\ell} + 1 \right)} + \frac{1}{1-h} \frac{1}{h \left(\frac{h}{\ell} + 1 \right)} \right]$$

$$\int_{-\ell}^0 \frac{dz}{(1-z)(h-z)^2} = \frac{\ln h}{(h-1)^2} + \frac{1}{h(1-h)}$$

$$\mathbb{E} = -\frac{a}{4\pi\epsilon_o} \left[\frac{\ln h}{(h-1)^2} + \frac{1}{h(1-h)} \right] \vec{a}_z$$

$$\mathbb{E} = \frac{a}{4\pi\epsilon_o} \left[\frac{1}{h(h-1)} - \frac{\ln h}{(h-1)^2} \right] \vec{a}_z \quad \square$$

Ejemplo 14.

Una carga superficial $\sigma = \frac{10^{-9}}{36\pi} \left[\frac{C}{m^2} \right]$, está situada en $z = 5[m]$ y una carga lineal uniforme $\lambda = \frac{25 \times 10^{-9}}{9} \left[\frac{C}{m} \right]$ en $(0, 3, -3)[m]$. Hallar el campo eléctrico en $P(x, -1, 0)[m]$

SOLUCIÓN

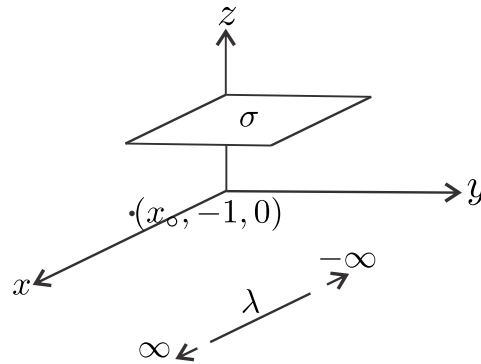


Figura 3.44 Placa y línea cargadas.

El campo debido a la distribución de carga longitudinal en P es:

$$\mathbb{E}_1 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o r} \vec{a}_r$$

El campo debido a la lámina en P es:

$$\mathbb{E}_2 = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{a}_z$$

donde $\vec{r} = -4\vec{a}_y + 3\vec{a}_z \rightarrow r = 5$

El campo eléctrico total en el punto P es:

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \vec{a}_r - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{a}_z = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \frac{-4\vec{a}_y + 3\vec{a}_z}{5} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{a}_z$$

$$\mathbb{E} = \frac{25 \times 10^{-9}}{9} \frac{1}{10\pi\varepsilon_0} \frac{-4\vec{a}_y + 3\vec{a}_z}{5} - \frac{10^{-9}}{36\pi} \frac{1}{2\varepsilon_0} \vec{a}_z$$

$$\mathbb{E} = 8\vec{a}_y - 12\vec{a}_z$$

□

Ejemplo 15.

Un disco de radio a y situado en $z = 0$ tiene una densidad de carga superficial $\sigma = \sigma_0 \left(\frac{r}{a}\right)^2$. Hallar el campo eléctrico en $(0, 0, h)$ en el espacio libre.

SOLUCIÓN

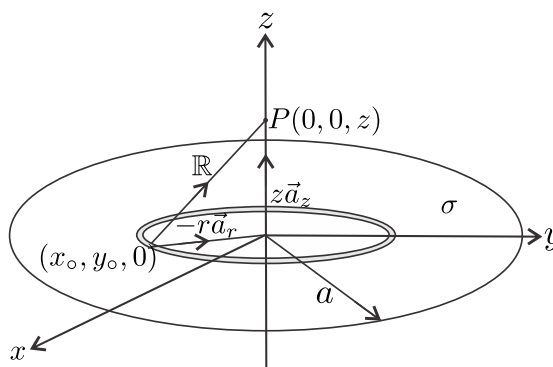


Figura 3.45 Disco de radio a que tiene una densidad de carga superficial variable.

$$\mathbb{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{dQ}{R^3} \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} = -r\vec{a}_r + h\vec{a}_z \rightarrow R = (r^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$dQ = \sigma_0 \left(\frac{r}{a}\right)^2 r dr d\varphi$$

$$\mathbb{E} = \frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{(-r\vec{a}_r + h\vec{a}_z) r^3 dr d\varphi}{(r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma_0 h}{2\varepsilon_0 a^2} \int_0^a \frac{r^3 dr}{(r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{a}_z$$

$$\mathbb{E} = \frac{\sigma_o h}{2\varepsilon_o a^2} \left[\frac{a^2 + 2h^2}{\sqrt{a^2 + h^2}} - 2h \right] \vec{a}_z \quad \square$$

Ejemplo 16.

Una línea de carga circular de radio a está en el plano xy , tiene una densidad de carga longitudinal $\lambda = \lambda_o \text{sen} \varphi$. Hallar el potencial y el campo eléctrico en $(0, 0, h)$.

SOLUCIÓN

$$\mathbb{R} = -a\vec{a}_r + h\vec{a}_z \rightarrow R = (a^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}$$

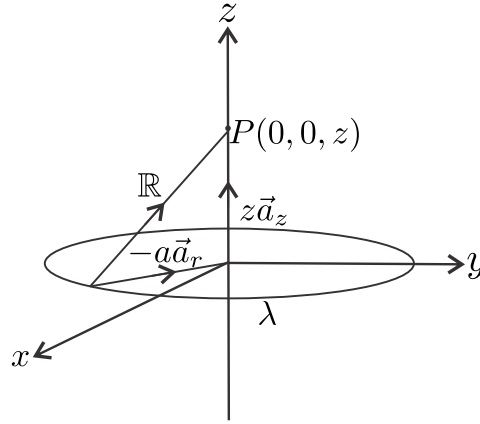


Figura 3.46 Espira circular de radio a que tiene una densidad de carga longitudinal variable.

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int_C \frac{dQ}{R} = \frac{a\lambda_o}{4\pi\varepsilon_o} \int_0^{2\pi} \frac{\text{sen} \varphi d\varphi}{(a^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}} = 0 \quad \square$$

$$\mathbb{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int_C \frac{dQ}{R^3} \mathbb{R} = \frac{a\lambda_o}{4\pi\varepsilon_o} \int_0^{2\pi} \frac{(-a\vec{a}_r + h\vec{a}_z) \text{sen} \varphi d\varphi}{(a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{a}_r = \cos \varphi \vec{a}_x + \text{sen} \varphi \vec{a}_y$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{E} = \frac{a\lambda_o}{4\pi\varepsilon_o} \int_0^{2\pi} \frac{[-a(\cos \varphi \vec{a}_x + \text{sen} \varphi \vec{a}_y) + h\vec{a}_z] \text{sen} \varphi d\varphi}{(a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathbb{E} = \frac{a^2 \lambda_o}{4\varepsilon_o (a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{a}_y \quad \square$$

Ejemplo 17.

Una esfera de radio a tiene una densidad de carga superficial $\sigma = -P_o \cos \theta$. Hallar

el campo eléctrico en $(0, 0, 0)$.

SOLUCIÓN

$$\mathbb{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{dQ}{R^3} \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} = -a\vec{a}_r \quad R = a \quad dQ = \sigma dS = -a^2 P_0 \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi$$

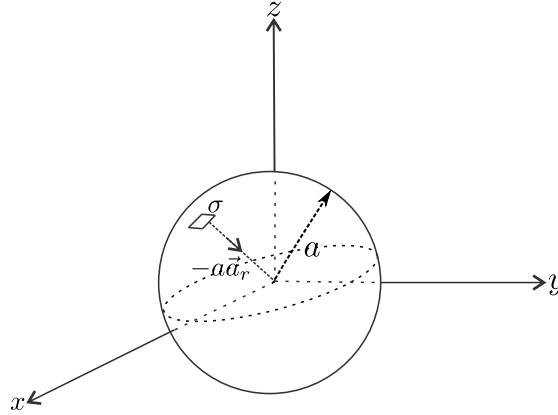


Figura 3.47 Espira de radio a que tiene una densidad de carga superficial variable.

$$\vec{a}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{a}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{a}_y + \cos \theta \vec{a}_z$$

$$\mathbb{E} = -\frac{a^2 P_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta \sin \theta (\sin \theta \cos \varphi \vec{a}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{a}_y + \cos \theta \vec{a}_z) d\theta d\varphi}{a^2}$$

$$\mathbb{E} = -\frac{P_0}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \vec{a}_z = -\frac{P_0}{2\epsilon_0} \left. \frac{\cos^3 \theta}{3} \right|_\pi^0 \vec{a}_z$$

$$\mathbb{E} = -\frac{P_0}{3\epsilon_0} \vec{a}_z$$

□

Ejemplo 18.

Una esfera sólida tiene una densidad volumétrica de carga ρ . Si se quita una cavidad esférica de aquélla, calcular el campo eléctrico en cualquier punto de la cavidad, ver Fig. 18.

SOLUCIÓN

$$\mathbb{E}_1 = E_1 \vec{a}_{r_1} \quad d\mathbb{S} = dS \vec{a}_{r_1}$$

La carga encerrada desde el centro de la esfera de radio a hasta una distancia r_1 es:

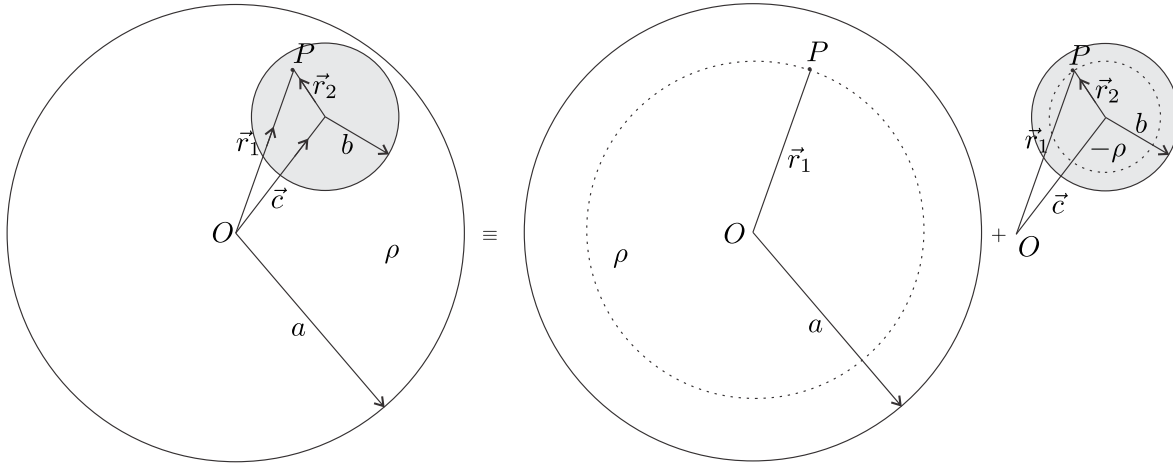


Figura 3.48 Cálculo del campo eléctrico en un punto de una cavidad esférica.

$$Q_{enc1} = \int_{\tau_1} \rho d\tau_1 = \frac{4\pi\rho r_1^3}{3}$$

$$\oint_{S_1} \mathbb{E}_1 \cdot d\mathbb{S}_1 = E_1 4\pi r_1^2 \rightarrow E_1 4\pi r_1^2 = \frac{4\pi\rho r_1^3}{3\epsilon_0} \rightarrow E_1 = \frac{\rho r_1}{3\epsilon_0}$$

$$\mathbb{E}_1 = \frac{\rho r_1}{3\epsilon_0} \vec{a}_{r_1}$$

La carga encerrada desde el centro de la esfera de radio b hasta una distancia r_2 es:

$$Q_{enc2} = \int_{\tau_2} -\rho d\tau_2 = -\frac{4\pi\rho r_2^3}{3}$$

$$\oint_{S_2} \mathbb{E}_2 \cdot d\mathbb{S}_2 = E_2 4\pi r_2^2 \rightarrow E_2 4\pi r_2^2 = -\frac{4\pi\rho r_2^3}{3\epsilon_0} \rightarrow E_2 = -\frac{\rho r_2}{3\epsilon_0}$$

$$\mathbb{E}_2 = -\frac{\rho r_2}{3\epsilon_0} \vec{a}_{r_2}$$

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (r_1 \vec{a}_{r_1} - r_2 \vec{a}_{r_2})$$

$$\text{Pero: } \mathbb{C} = r_1 \vec{a}_{r_1} - r_2 \vec{a}_{r_2}$$

$$\mathbb{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbb{C}$$

□

Ejemplo 19.

Una distribución de carga esférica de radio a tiene una densidad de carga volumétrica que es función únicamente de r .

$$\text{Si } \rho(r) = \begin{cases} \frac{\rho_o}{r} & 0 \leq r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

ρ_o es una constante. Hallar el potencial y el campo eléctrico para ambas regiones.

SOLUCIÓN

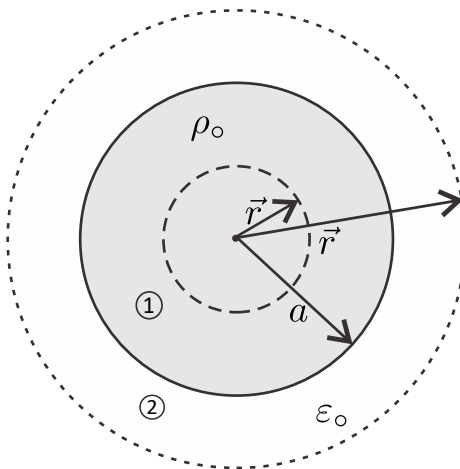


Figura 3.49 Superficies gaussianas para evaluar el campo eléctrico en el interior y exterior de la esfera cargada.

a. $r > a$

$$Q_{enc} = \int_{\tau} \rho d\tau = \rho_o \int_0^a \frac{1}{r_o} r_o^2 dr_o \int_0^\pi \sin\theta_o d\theta_o \int_0^{2\pi} d\varphi_o = 2\pi a^2 \rho_o$$

$$\int_{S_2} \mathbb{E}_2 \cdot d\mathbb{S}_2 = E_2 4\pi r^2 \rightarrow E_2 4\pi r^2 = \frac{2\pi a^2 \rho_o}{\epsilon_o} \rightarrow E_2 = \frac{a^2 \rho_o}{2\epsilon_o r^2}$$

$$\mathbb{E}_2 = \frac{a^2 \rho_o}{2\epsilon_o r^2} \vec{a}_r$$

□

$$V_2 = \int_r^\infty \mathbb{E}_2 \cdot \vec{dr} = \frac{a^2 \rho_o}{2\epsilon_o} \int_r^\infty \frac{\vec{a}_r \cdot dr \vec{a}_r}{r^2}$$

$$V_2 = \frac{a^2 \rho_o}{2\epsilon_o r}$$

□

b. $r < a$

$$Q_{enc} = \int_{\tau} \rho d\tau = \rho_o \int_0^r \frac{1}{r_o} r_o^2 dr_o \int_0^\pi \sin\theta_o d\theta_o \int_0^{2\pi} d\varphi_o = 2\pi r^2 \rho_o$$

$$\int_{S_1} \mathbb{E}_1 \cdot d\mathbb{S}_1 = E_1 4\pi r^2 \rightarrow E_1 4\pi r^2 = \frac{2\pi r^2 \rho_o}{\varepsilon_o} \rightarrow E_1 = \frac{\rho_o}{2\varepsilon_o}$$

$$\mathbb{E}_1 = \frac{\rho_o}{2\varepsilon_o} \vec{a}_r$$

$$\int_{V_a}^{V_1} dV_1 = \int_r^a \mathbb{E}_1 \cdot \vec{dr} = \frac{\rho_o}{2\varepsilon_o} \int_r^a \vec{a}_r \cdot dr \vec{a}_r = \frac{\rho_o}{2\varepsilon_o} (a - r)$$

$$\text{donde } V_a = \frac{a\rho_o}{2\varepsilon_o}$$

Y, finalmente:

$$V_1 = \frac{a\rho_o}{2\varepsilon_o} + \frac{\rho_o}{2\varepsilon_o} (a - r) = \frac{\rho_o}{\varepsilon_o} \left(a - \frac{r}{2} \right)$$

□

Ejemplo 20.

Si la diferencia de potencial entre los puntos $A(1, 0, 0)$ y $B(2, 0, 0)$ es $10 [V]$, determinar c para $C(c, 0, 0)$ tal que $V_{BC} = 6 [V]$, si los puntos están:

- En el campo de una carga puntual localizada en el origen.
- En el campo de una línea de carga muy larga colocada sobre el eje z .
- En un campo uniforme.

SOLUCIÓN

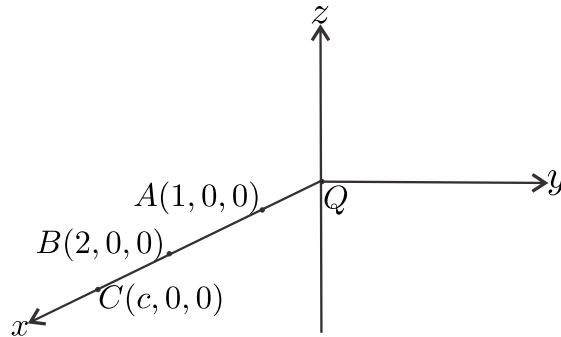


Figura 3.50 Carga puntual situada en el origen.

- El potencial debido a una carga puntual es $V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r}$, entonces:

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o (1)} \quad V_B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o (2)} \quad V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_o}$$

$$Q = 8\pi\varepsilon_o (V_{AB}) = 80\pi\varepsilon_o$$

$$V_B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o(2)} \quad V_C = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o(c)} \quad V_{BC} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{c} \right)$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{c} = \frac{4\pi\epsilon_o V_{BC}}{Q} = \frac{3}{10} \quad \frac{1}{c} = \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{1}{5}$$

$$c = 5$$

□

b. El potencial debido a una línea es $V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{1}{r}$, entonces:

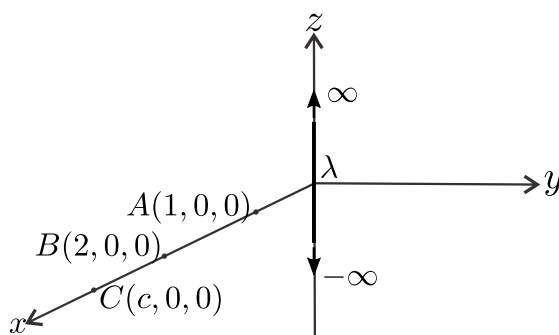


Figura 3.51 Línea cargada muy larga en el eje z.

$$V_A = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{1}{1} = 0 \quad V_B = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{1}{2} \quad V_{AB} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{1}{2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o} \ln 2$$

$$\lambda = \frac{2\pi\epsilon_o V_{AB}}{\ln 2} = \frac{20\pi\epsilon_o}{\ln 2}$$

$$V_B = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{1}{2} \quad V_C = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{1}{c} \quad V_{BC} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o} \left(\ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{c} \right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{c}{2}$$

$$\lambda = \frac{2\pi\epsilon_o V_{AB}}{\ln 2} = \frac{20\pi\epsilon_o}{\ln 2}$$

$$\ln \frac{c}{2} = \frac{2\pi\epsilon_o V_{BC}}{\lambda} = \frac{12\pi\epsilon_o}{\lambda} = \frac{3}{5} \ln 2 = \ln 2^{\frac{3}{5}}$$

$$c = 2^{\frac{5}{3}} = 3,03$$

□

c. $\mathbb{E} = E_o \vec{a}_x$

$$dV = -\mathbb{E} \cdot \vec{d\ell} \rightarrow \int_{V_A}^{V_B} dV = -\int_1^2 E_o \vec{a}_x \cdot dx \vec{a}_x$$

$$V_A - V_B = V_{AB} = E_o \rightarrow E_o = 10$$

$$dV = -\mathbb{E} \cdot \vec{d\ell} \rightarrow \int_{V_B}^{V_C} dV = -\int_2^c E_o \vec{a}_x \cdot dx \vec{a}_x$$

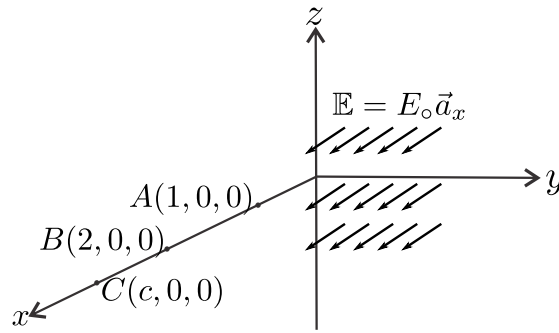


Figura 3.52 Campo uniforme.

$$V_B - V_C = V_{BC} = E_o (c - 2) \rightarrow 6 = 10 (c - 2)$$

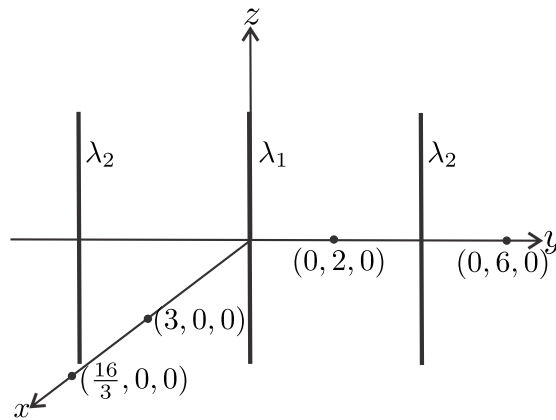
$$c = 2,6$$

□

Ejemplo 21.

Tres líneas de carga están localizadas en el espacio libre en el plano $x = 0$ así: $\lambda_1 = 40 \times 10^{-9} \left[\frac{C}{m} \right]$ en $y = 0$, y $\lambda_2 = -20 \times 10^{-9} \left[\frac{C}{m} \right]$ en $y = \mp 4$, respectivamente. Hallar la diferencia de potencial entre los puntos:

- $(3, 0, 0) [m]$ y $(\frac{16}{3}, 0, 0) [m]$
- $(0, 2, 0) [m]$ y $(0, 6, 0) [m]$

SOLUCIÓNFigura 3.53 Tres líneas de carga en el plano $x=0$.

El potencial debido a una línea es $V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{1}{r}$

a.

$$V_1 = \frac{-20 \times 10^{-9}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{5} + \frac{40 \times 10^{-9}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{3} + \frac{-20 \times 10^{-9}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{5}$$

$$V_2 = \frac{-20 \times 10^{-9}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{3}{20} + \frac{40 \times 10^{-9}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{16} + \frac{-20 \times 10^{-9}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{3}{20}$$

$$V_{12} = V_1 - V_2 = 2 \left[\frac{-20 \times 10^{-9}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{20}{15} \right] + \frac{40 \times 10^{-9}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{16}{9}$$

$$V_{12} = 206,93 [V]$$

□

b.

$$V_3 = \frac{-20 \times 10^{-9}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{6} + \frac{40 \times 10^{-9}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{2} + \frac{-20 \times 10^{-9}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{2}$$

$$V_4 = \frac{-20 \times 10^{-9}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{10} + \frac{40 \times 10^{-9}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{6} + \frac{-20 \times 10^{-9}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{2}$$

$$V_{34} = V_3 - V_4 = \frac{-20 \times 10^{-9}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{10}{6} + \frac{40 \times 10^{-9}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{6}{2} + \frac{-20 \times 10^{-9}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2}{2}$$

$$V_{34} = 607,32 [V]$$

□

Ejemplo 22.

Una cáscara esférica delgada, conductora de radio a , se carga uniformemente con una carga total Q . Hallar el potencial y el campo eléctrico:

a. fuera de la cáscara.

b. en el interior de la cáscara.

SOLUCIÓN

La expresión analítica para determinar el potencial electrostático es:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{dQ}{R}$$

$$dQ = \sigma dS = a^2 \sigma \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\mathbb{R} = -a\vec{a}_r + z\vec{a}_z \quad \vec{a}_r = \sin\theta \cos\varphi \vec{a}_x + \sin\theta \sin\varphi \vec{a}_y + \cos\theta \vec{a}_z$$

por lo tanto:

$$\mathbb{R} = -a \sin\theta \cos\varphi \vec{a}_x - a \sin\theta \sin\varphi \vec{a}_y + (z - a \cos\theta) \vec{a}_z$$

entonces:

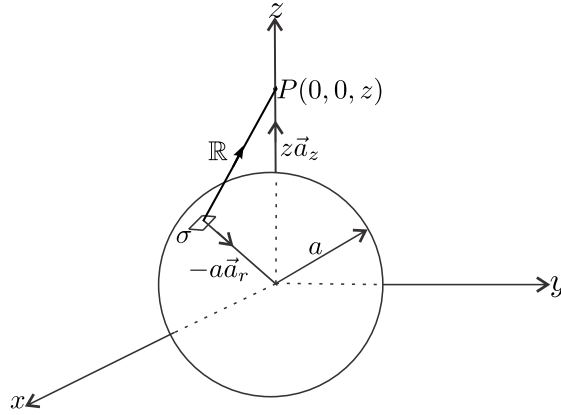


Figura 3.54 Ejemplo 22.

$$R = (a^2 + z^2 - 2az \cos \theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$V = \frac{a^2 \sigma}{4\pi \epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{(a^2 + z^2 - 2az \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^2 \sigma}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{(a^2 + z^2 - 2az \cos \theta)^{\frac{1}{2}}}$$

Con el fin de mostrar que el contenido físico doblaga a las matemáticas se realizará la integral anterior. Se hace el siguiente cambio de variable:

$$u^2 = a^2 + z^2 - 2az \cos \theta \rightarrow u du = az \sin \theta d\theta$$

$$\text{Para: } \begin{cases} \theta = 0 & u^2 = a^2 + z^2 - 2az = (z - a)^2 = (a - z)^2 & u = z - a \\ \theta = \pi & u^2 = a^2 + z^2 + 2az = (z + a)^2 & u = z + a \end{cases}$$

Para un punto exterior $r > a$:

$$V = \frac{a\sigma}{2\epsilon_0} \int_{z-a}^{z+a} du = \frac{a^2 \sigma}{\epsilon_0 z}$$

Pero $\sigma = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 a^2}$, entonces:

$$V = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 z} \quad \square$$

El campo eléctrico se obtiene a partir del gradiente negativo del potencial eléctrico:

$$\mathbb{E} = -\nabla V = -\frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \nabla \left(\frac{1}{z} \right) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 z^2} \vec{a}_z \quad \square$$

Para un punto interior $z < a$:

$$V = \frac{a\sigma}{2\epsilon_0} \int_{a-z}^{a+z} du = \frac{a\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 a} \quad \square$$

El campo eléctrico se obtiene a partir del gradiente negativo del potencial eléctrico:

$$\mathbb{E} = -\nabla V = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \nabla \left(\frac{1}{a} \right) = 0 \quad \square$$

Ejemplo 23.

Una placa conductora delgada muy grande tiene una densidad superficial de carga σ . Demostrar que la mitad del campo electrostático en un punto a $z[m]$ de la superficie de la placa se debe a carga sobre la placa situada en un círculo de radio $\sqrt{3}z$.

SOLUCIÓN

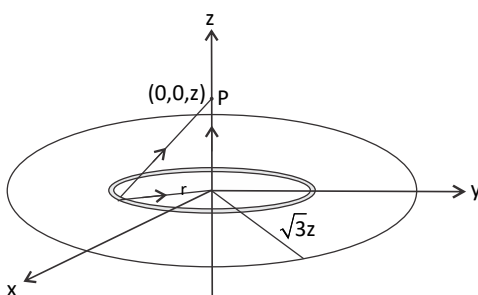


Figura 3.55 Ejemplo 20.

$$\mathbb{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_S \frac{dQ}{R^3} \mathbb{R}$$

$$dQ = \sigma dS = \sigma r dr d\varphi \quad \mathbb{R} = -r\vec{a}_r + z\vec{a}_z \quad (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathbb{E} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_o} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}z} \frac{r dr d\varphi (-r\vec{a}_r + z\vec{a}_z)}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathbb{E} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_o} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}z} \frac{r dr d\varphi [-r(\cos\varphi\vec{a}_x + \sin\varphi\vec{a}_y) + z\vec{a}_z]}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathbb{E} = \frac{\sigma}{4\epsilon_o} \vec{a}_z \quad \square$$

Ejemplo 24.

La región esférica $a < r < b$ tiene una densidad de carga volumétrica $\rho = \frac{\rho_o}{r}$, siendo ρ_o una constante. En el centro de la cavidad cerrada se halla una carga puntual Q . ¿Cuál debe ser el valor de ρ_o para que el campo eléctrico en la región $a < r < b$ tenga una magnitud constante?

SOLUCIÓN

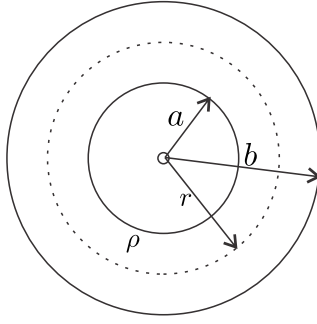


Figura 3.56 Ejemplo 24.

$$a < r < b$$

$$Q_{enc} = Q + \int \rho d\tau = Q + \rho_0 \int_a^r \frac{1}{r} r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = Q + 2\pi\rho_0 (r^2 - a^2)$$

$$\mathbb{E} = E\vec{a}_r \quad d\mathbb{S} = dS\vec{a}_r$$

$$\int_S \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = E4\pi r^2 \rightarrow E4\pi r^2 = \frac{Q + 2\pi\rho_0 (r^2 - a^2)}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{Q + 2\pi\rho_0 (r^2 - a^2)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\mathbb{E} = \frac{Q + 2\pi\rho_0 (r^2 - a^2)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{a}_r \rightarrow \begin{cases} r = a & \mathbb{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \vec{a}_r \\ r = b & \mathbb{E} = \frac{Q + 2\pi\rho_0 (b^2 - a^2)}{4\pi\epsilon_0 b^2} \vec{a}_r \end{cases}$$

$\mathbb{E}$ es constante en $a < r < b$, por lo tanto:

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{Q + 2\pi\rho_0 (b^2 - a^2)}{4\pi\epsilon_0 b^2}$$

Si se soluciona para ρ_0 , se obtiene:

$$\rho_0 = \frac{Q}{2\pi a^2}$$

□

Ejemplo 25.

Un sistema de distribución trifásico, se dispone como se muestra en la Fig.3.57, en un conductor sólido #2. Si el conductor A debido a una falla se aterriza, calcular λ_A , λ_B , λ_C , λ_g , V_{Ag} , V_{Bg} y V_{Cg} . Suponer que $V_{AB} = V_{AC} = 1,32 \times 10^4$ [V]

SOLUCIÓN

$$V_A = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[\lambda_A \ln \frac{1}{D_{11}} + \lambda_B \ln \frac{1}{D_{12}} + \lambda_C \ln \frac{1}{D_{13}} - \left(\lambda_A \ln \frac{1}{D_{11}} + \lambda_B \ln \frac{1}{D_{12}} + \lambda_C \ln \frac{1}{D_{13}} \right) \right]$$

de donde se obtiene:

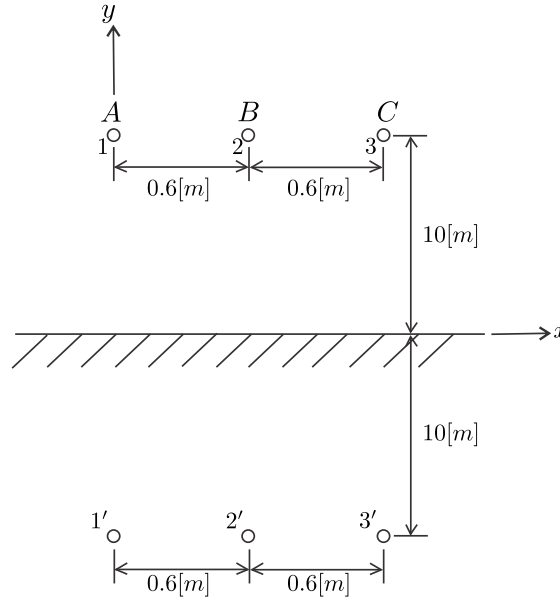


Figura 3.57 Ejemplo 25.

$$V_A = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[\lambda_A \ln \frac{D_{11'}}{D_{11}} + \lambda_B \ln \frac{D_{12'}}{D_{12}} + \lambda_C \ln \frac{D_{13'}}{D_{13}} \right]$$

De modo similar se hallan los otros potenciales. Y en forma matricial:

$$\begin{vmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ln \frac{D_{11'}}{D_{11}} & \ln \frac{D_{12'}}{D_{12}} & \ln \frac{D_{13'}}{D_{13}} \\ \ln \frac{D_{21'}}{D_{21}} & \ln \frac{D_{22'}}{D_{22}} & \ln \frac{D_{23'}}{D_{23}} \\ \ln \frac{D_{31'}}{D_{31}} & \ln \frac{D_{32'}}{D_{32}} & \ln \frac{D_{33'}}{D_{33}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \\ \lambda_C \end{vmatrix}$$

$$V_A = V_g = 0 \quad V_{AB} = V_{AC} = 1,32 \times 10^4 [V]$$

$$R_A = R_B = R_C = R_D = 0,1288 \times 2,54 \times 10^{-2} [m]$$

$$D_{11'} = D_{22'} = D_{33'} = D_{1'1} = D_{2'2} = D_{3'3} = 20 [m]$$

$$D_{12'} = D_{23'} = D_{21'} = D_{32'} = D_{2'1} = D_{3'2} = D_{1'2} = D_{2'3} = \sqrt{0,6^2 + 20^2} = 20,01 [m]$$

$$D_{12} = D_{23} = D_{1'2'} = D_{2'3'} = D_{21} = D_{32} = D_{2'1'} = D_{3'2'} = 0,6 [m]$$

$$D_{13} = D_{31} = D_{1'3'} = D_{3'1'} = 1,2 [m]$$

$$D_{13'} = D_{31'} = D_{3'1} = D_{1'3} = \sqrt{20^2 + 1,2^2} = 20,04 [m]$$

$$\lambda_A = +5,80 \times 10^{-8} \left[\frac{C}{m} \right] \quad \square$$

$$\lambda_B = -9,13 \times 10^{-8} \left[\frac{C}{m} \right] \quad \square$$

$$\lambda_C = -6,59 \times 10^{-8} \left[\frac{C}{m} \right] \quad \square$$

$$\lambda_g = -9,92 \times 10^{-8} \left[\frac{C}{m} \right] \quad \square$$

$$\frac{1}{2\pi\epsilon_o} = 18 \times 10^9 \left[\frac{m}{F} \right]$$

$$V_A = 180 \left[5,80 \ln \frac{20}{0,1288 \times 2,54 \times 10^{-2}} - 9,13 \ln \frac{\sqrt{0,6^2 + 20^2}}{0,6} - 6,59 \ln \frac{\sqrt{20^2 + 1,2^2}}{1,2} \right]$$

$$V_A - V_g = V_A = -0,98 [V] \quad \square$$

$$V_B = 180 \left[5,80 \ln \frac{\sqrt{0,6^2 + 20^2}}{1,2} - 9,13 \ln \frac{20}{0,1288 \times 2,54 \times 10^{-2}} - 6,59 \ln \frac{\sqrt{0,6^2 + 20^2}}{0,6} \right]$$

$$V_B - V_g = V_B = 14819 [V] \quad \square$$

$$V_C = 180 \left[5,80 \ln \frac{\sqrt{20^2 + 1,2^2}}{0,6} - 9,13 \ln \frac{\sqrt{0,6^2 + 20^2}}{0,6} - 6,59 \ln \frac{20}{0,1288 \times 2,54 \times 10^{-2}} \right]$$

$$V_C - V_g = V_C = 13158 [V] \quad \square$$

Ejemplo 26.

Cuatro esferas pequeñas conductoras idénticas de radio a , se colocan en los vértices de un cuadrado de lado d . Inicialmente las esferas 1 y 2 tienen cargas Q y $-Q$, respectivamente; la esfera 1 se conecta a la 3 mediante un alambre conductor, el cual se quita una vez se ha alcanzado el equilibrio electrostático. A continuación, la esfera 1 se conecta a la 4, mediante un alambre conductor y una vez se ha obtenido el equilibrio electrostático se quita el alambre. Si $d \gg a$, hallar la carga sobre la esfera 4, ver Fig. 3.58.

SOLUCIÓN

Al unir las esferas 1 y 3, empieza a pasar carga de la 1 a la 3; este proceso termina cuando ambas esferas están al mismo potencial, entonces:

$$V_1 = \frac{Q - Q_3}{4\pi\epsilon_o a} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_o d} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_o d\sqrt{2}}$$



a. Desconexión del alambre que une las cargas 1 y 3.

b. Desconexión del alambre que une las cargas 1 y 4.

Figura 3.58 Ejemplo 26.

$$V_3 = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{Q - Q_3}{4\pi\epsilon_0 d\sqrt{2}} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 a}$$

Q_3 : carga que pasa de la esfera 1 a la 3.

En el equilibrio:

$$\frac{Q - Q_3}{a} - \frac{Q}{d} + \frac{Q_3}{d\sqrt{2}} = -\frac{Q}{d} + \frac{Q - Q_3}{d\sqrt{2}} + \frac{Q_3}{a}$$

$$Q_3 = \frac{Q}{2}$$

Cuando se conectan las esferas 1 y 4, de la 1 pasa carga a la 4, ya que aquélla está a mayor potencial.

$$V_1 = \frac{Q_4}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{\frac{Q}{2}}{4\pi\epsilon_0 d\sqrt{2}} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{\frac{Q}{2} - Q_4}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$$V_4 = \frac{\frac{Q}{2}}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{\frac{Q}{2} - Q_4}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 d\sqrt{2}} + \frac{Q_4}{4\pi\epsilon_0 a}$$

Q_4 : carga que pasa de la esfera 1 a la 4.

En el equilibrio:

$$\frac{Q_4}{d} + \frac{\frac{Q}{2}}{\sqrt{2}} - \frac{Q}{d} + \frac{\frac{Q}{2} - Q_4}{a} = \frac{Q - Q_4}{d} - \frac{Q}{d\sqrt{2}} + \frac{Q_4}{a}$$

$$Q_4 = \frac{Q}{4\sqrt{2}} \frac{d\sqrt{2} - (4\sqrt{2} - 3)a}{d - a}$$

□

Ejemplo 27.

Si $V = 100e^{-x}\text{sen}y$, demostrar que el plano $y = 0$, puede ser una superficie con-

ductora y hallar la carga total entre $x = 0$ y $x = 1$ [m]. $z = 0$ y $z = 1$ [m].

SOLUCIÓN

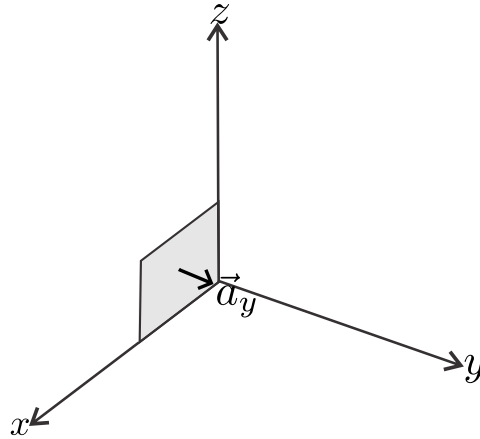


Figura 3.59 Ejemplo 27.

Si $y = 0$, entonces $V = 0$.

El plano $y = 0$ es una superficie equipotencial, condición necesaria pero no suficiente para que el plano sea conductor. El campo eléctrico se obtiene a partir del gradiente negativo del potencial eléctrico.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -100e^{-x}\text{sen}y \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 100e^{-x}\text{cos}y$$

$$\mathbb{E} = -\nabla V = 100e^{-x}(\text{sen}y\vec{a}_x - \text{cos}y\vec{a}_y)$$

Si $y = 0$, entonces $\mathbb{E} = -100e^{-x}\vec{a}_y$

El campo es normal al plano xz , el cual se puede considerar debido a una placa conductora muy grande, por lo tanto:

$$\mathbb{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{a}_y = -100e^{-x}\vec{a}_y \quad \sigma = -100\epsilon_0 e^{-x}$$

$$Q = \int_S \sigma dS = -100\epsilon_0 \int_0^1 \int_0^1 e^{-x} dx dz$$

$$Q = 100\epsilon_0 (e^{-1} - 1)$$

□

Ejemplo 28.

Tres placas conductoras se colocan paralelas. La placa interior está aislada y tiene una densidad superficial de carga σ . Determinar la densidad superficial de carga sobre cada cara de la placa interior cuando las externas se conectan mediante un

hilo conductor, como se muestra en la Fig. 3.60.

SOLUCIÓN

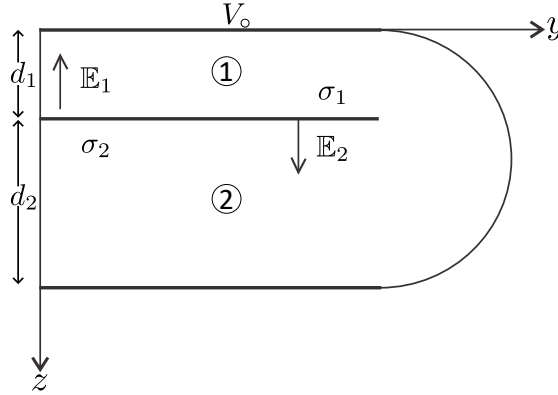


Figura 3.60 Ejemplo 28.

$$V_1 = A_1 z + B_1 \rightarrow \mathbb{E}_1 = -A_1 \vec{a}_z \quad (3.167)$$

$$V_2 = A_2 z + B_2 \rightarrow \mathbb{E}_2 = -A_2 \vec{a}_z \quad (3.168)$$

a. $z = 0 \quad V_1 = V_o$

$$V_o = A_1 (0) + B_1 \quad \therefore B_1 = V_o$$

por lo tanto: $V_1 = A_1 z + V_o$

b. $z = d_1 + d_2 \quad V_2 = V_o$

$$V_o = A_2 (d_1 + d_2) + B_2 \quad \therefore B_2 = V_o - A_2 (d_1 + d_2)$$

por lo tanto: $V_2 = A_2 [z - (d_1 + d_2)] + V_o$

c. $z = d_1 \quad V_1 = V_2$

$$A_1 d_1 + V_o = -A_2 d_2 + V_o$$

$$A_2 = -A_1 \frac{d_1}{d_2} \quad (3.169)$$

d. El campo eléctrico debido a cada una de las caras de la placa interior, en cada una de las regiones, es:

$$\mathbb{E}_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_o} (-\vec{a}_z) \quad \mathbb{E}_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_o} \vec{a}_z \quad (3.170)$$

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad \sigma S = \sigma_1 S + \sigma_2 S$$

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \quad (3.171)$$

donde S es el área de cada una de las superficies de las caras de la placa interna. Entonces al comparar las ecuaciones del campo eléctrico de los conjuntos de Ecs. (3.168), (3.169) y (3.170):

$$-A_1 \vec{a}_z = -\frac{\sigma_1}{\varepsilon_o} \vec{a}_z \rightarrow \sigma_1 = \varepsilon_o A_1$$

$$-A_2 \vec{a}_z = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_o} \vec{a}_z \rightarrow \sigma_2 = -\varepsilon_o A_2$$

Remplazando los valores anteriores en la Ec. (3.171):

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \varepsilon_o (A_1 - A_2) \quad (3.172)$$

En la Ec. (3.172) se remplaza el valor correspondiente dado por la Ec. (3.169), entonces se tiene:

$$\sigma = \frac{A_1 \varepsilon_o (d_1 + d_2)}{d_2} \rightarrow A_1 = \frac{\sigma d_2}{\varepsilon_o (d_1 + d_2)}$$

De la Ec. (3.169), se calcula el valor de la constante A_2 :

$$A_2 = -\frac{\sigma d_1}{\varepsilon_o (d_1 + d_2)}$$

entonces:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma d_2}{d_1 + d_2} \quad \sigma_2 = \frac{\sigma d_1}{d_1 + d_2} \quad \square$$

Ejemplo 29.

El plano xz tiene una densidad superficial de carga variable σ . No hay carga en la región $|y| > 0$, y cuál es la correspondiente distribución de carga superficial sobre el plano xz , si:

a. $V_1 = e^{-y} \cosh x$

b. $V_2 = e^{-y} \cos x$

c. $V_3 = e^{-\sqrt{2}y} \cos x \operatorname{sen} z$

d. $V_4 = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z$

SOLUCIÓN

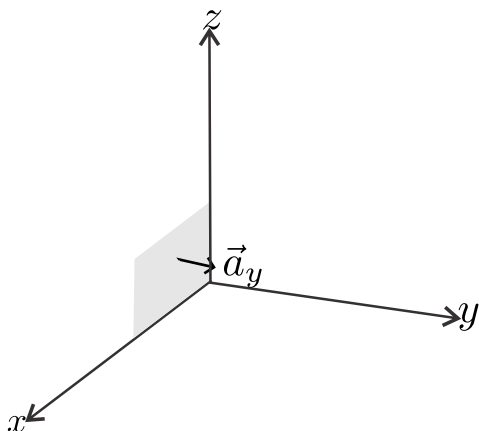


Figura 3.61 Ejemplo 26.

a. $V_1 = e^{-y} \cosh x$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = e^{-y} \operatorname{sen} h x \quad \frac{\partial V_1}{\partial y} = -e^{-y} \cosh x$$

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} = e^{-y} \cosh x \quad \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} = e^{-y} \cosh x$$

entonces: $\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} \neq 0$

$V_1 = e^{-y} \cosh x$, no es una solución a la ecuación de Laplace. □

b. $V_2 = e^{-y} \cos x$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x} = -e^{-y} \operatorname{sen} x \quad \frac{\partial V_2}{\partial y} = -e^{-y} \cos x$$

$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} = -e^{-y} \cos x \quad \frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2} = e^{-y} \cos x$$

entonces: $\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2} = 0$

$V_2 = e^{-y} \cos x$, es una solución a la ecuación de Laplace. □

El plano xy tiene una distribución de carga superficial y aquél puede considerarse

como una placa cargada, por lo tanto:

$$\mathbb{E}_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \vec{a}_y \quad \mathbb{E}_2 = e^{-y} (\operatorname{sen} x \vec{a}_x + \operatorname{cos} x \vec{a}_y)$$

Para la placa ubicada en $y = 0$:

$\mathbb{E}_2 = \operatorname{sen} x \vec{a}_x + \operatorname{cos} x \vec{a}_y$. Una distribución de carga superficial para la placa ubicada en $y = 0$, se obtiene así:

$$\mathbb{E}_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \vec{a}_y = \operatorname{cos} x \vec{a}_y$$

$$\sigma_2 = 2\varepsilon_0 \operatorname{cos} x \quad \square$$

$$c. \quad V_3 = e^{-\sqrt{2}y} \operatorname{cos} x \operatorname{sen} z$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial x} = -e^{-\sqrt{2}y} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} z \quad \frac{\partial V_3}{\partial y} = -\sqrt{2} e^{-\sqrt{2}y} \operatorname{cos} x \operatorname{sen} z \quad \frac{\partial V_3}{\partial z} = e^{-\sqrt{2}y} \operatorname{cos} x \operatorname{cos} z$$

$$\frac{\partial^2 V_3}{\partial x^2} = -e^{-\sqrt{2}y} \operatorname{cos} x \operatorname{sen} z \quad \frac{\partial^2 V_3}{\partial y^2} = 2e^{-\sqrt{2}y} \operatorname{cos} x \operatorname{sen} z \quad \frac{\partial^2 V_3}{\partial z^2} = -e^{-\sqrt{2}y} \operatorname{cos} x \operatorname{sen} z$$

$$\text{entonces: } \frac{\partial^2 V_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_3}{\partial z^2} = 0$$

$V_3 = e^{-\sqrt{2}y} \operatorname{cos} x \operatorname{sen} z$, es una solución a la ecuación de Laplace. $\square$

$$\mathbb{E}_3 = e^{-\sqrt{2}y} (\operatorname{sen} x \operatorname{sen} z \vec{a}_x + \sqrt{2} \operatorname{cos} x \operatorname{sen} z \vec{a}_y - \operatorname{cos} x \operatorname{cos} z \vec{a}_z)$$

Para la placa ubicada en $y = 0$:

$$\mathbb{E}_3 = \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} \vec{a}_y = \sqrt{2} \operatorname{cos} x \operatorname{sen} z \vec{a}_y$$

$$\sigma_3 = 2\sqrt{2}\varepsilon_0 \operatorname{cos} x \operatorname{sen} z \quad \square$$

$$d. \quad V_4 = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z$$

$$\frac{\partial V_4}{\partial x} = \operatorname{cos} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z \quad \frac{\partial V_4}{\partial y} = \operatorname{sen} x \operatorname{cos} y \operatorname{sen} z \quad \frac{\partial V_4}{\partial z} = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{cos} z$$

$$\frac{\partial^2 V_4}{\partial x^2} = -\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z \quad \frac{\partial^2 V_4}{\partial y^2} = -\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z \quad \frac{\partial^2 V_4}{\partial z^2} = -\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z$$

$$\text{entonces: } \frac{\partial^2 V_4}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_4}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_4}{\partial z^2} = -3\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z$$

$V_4 = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z$, es una solución a la ecuación de Laplace. $\square$

Ejemplo 30.

Si $p = 400\pi\epsilon_o$, hallar las ecuaciones de la línea equipotencial y de fuerza que pasan por $(2[m], 60^\circ, 0)$. Asimismo, demostrar que estas curvas son perpendiculares en dicho punto.

SOLUCIÓN

Se tiene:

$$V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_o r^2} = \frac{400\pi\epsilon_o \cos \theta}{4\pi\epsilon_o r^2} = \frac{100 \cos \theta}{r^2}$$

Para: $r = 2[m] \quad \theta = \frac{\pi}{3}$

$$V = \frac{100 \cos \frac{\pi}{3}}{2^2} = 25 \left(\frac{1}{2}\right) = 12,5 [V]$$

Por lo tanto, la ecuación de la línea equipotencial es:

$$12,5 = \frac{100 \cos \theta}{r^2}$$

$$r^2 = 8 \cos \theta$$

□

La pendiente a la curva en el punto solicitado es:

$$2r \frac{dr}{d\theta} = -8 \operatorname{sen} \theta \rightarrow \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{4 \operatorname{sen} \theta}{r^2}$$

Se evalúa en $(2, \frac{\pi}{3}, 0)$

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}}{2^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

□

$$\mathbb{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_o r^3} (2 \cos \theta \vec{a}_r + \operatorname{sen} \theta \vec{a}_\theta)$$

La ecuación de las líneas de fuerza se obtiene así:

$$\frac{dr}{r d\theta} = \frac{2 \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{2 \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} d\theta$$

$$r = c \operatorname{sen}^2 \theta$$

Para: $r = 2[m] \quad \theta = \frac{\pi}{3}$

$$2 = c \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{3} \rightarrow 2 = c \frac{3}{4} \rightarrow c = \frac{8}{3}$$

Por lo tanto, la ecuación de las líneas de fuerza es:

$$r = \frac{8}{3} \operatorname{sen}^2 \theta$$

La pendiente a la curva en el punto solicitado es:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{16}{3} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = \frac{16}{3r} \operatorname{sen}\theta \cos\theta$$

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = \frac{16}{6} \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{3} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = \frac{8}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\left[\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} \right] \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} \right] = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \right) = -1$$

El producto de ambas pendientes es -1, por lo tanto, las curvas son ortogonales en el punto mencionado.

Ejemplo 31.

La distancia entre dos placas planas paralelas conductoras es d . En el espacio entre ellas se introduce otra de espesor t , cuya superficie es paralela a las otras, las cuales poseen potenciales V_1 y V_2 , $V_1 > V_2$. Hallar el potencial de la placa de espesor t .

SOLUCIÓN

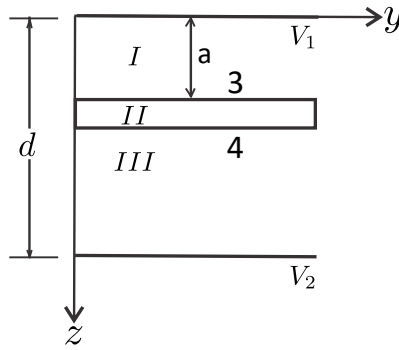


Figura 3.62 Ejemplo 28.

$$V_I = A_1 z + B_1 \quad \rightarrow \quad \mathbb{E}_I = -A_1 \vec{a}_z$$

$$V_{II} = A_2 z + B_2 \quad \rightarrow \quad \mathbb{E}_{II} = -A_2 \vec{a}_z$$

$$V_{III} = A_3 z + B_3 \quad \rightarrow \quad \mathbb{E}_{III} = -A_3 \vec{a}_z$$

a. $z = 0 \quad V_I = V_1$

$$V_1 = A_1(0) + B_1 \quad \therefore \quad B_1 = V_1$$

por lo tanto: $V_I = A_1 z + V_1$

b. $z = d \quad V_{III} = V_2$

$$V_2 = A_3 d + B_3 \quad \therefore \quad B_3 = V_2 - A_3 d$$

$$V_{III} = A_3(z - d) + V_2$$

c. El campo en el interior de un conductor es cero: $\mathbb{E}_{II} = 0$. Por lo tanto, $A_2 = 0$, de este modo:

$$V_{II} = B_2$$

d. En la placa conductora de espesor t , se cumple el principio de conservación de la carga y por lo tanto:

$$Q_3 + Q_4 = 0 \rightarrow \sigma_3 S + \sigma_4 S = 0 \rightarrow \sigma_3 + \sigma_4 = 0$$

Donde S es el área de cada una de las superficies de la placa de espesor t . Entonces:

$$\mathbb{E}_3 = \frac{\sigma_3}{\varepsilon_0}(-\vec{a}_z) \quad \mathbb{E}_4 = \frac{\sigma_4}{\varepsilon_0}\vec{a}_z$$

e. $z = a \quad \mathbb{E}_1 = \mathbb{E}_3$

$$\mathbb{E}_1 = -A_1\vec{a}_z \rightarrow \mathbb{E}_3 = -\frac{\sigma_3}{\varepsilon_0}\vec{a}_z \rightarrow A_1 = \frac{\sigma_3}{\varepsilon_0}$$

f. $z = a + t \quad \mathbb{E}_4 = \mathbb{E}_{III}$

$$\mathbb{E}_{III} = -A_3\vec{a}_z \quad \mathbb{E}_4 = \frac{\sigma_4}{\varepsilon_0}\vec{a}_z \quad A_3 = -\frac{\sigma_4}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_3}{\varepsilon_0}$$

así: $A_1 = A_3$

g. $z = a \quad V_I = V_{II}$

$$V_I = A_1 a + V_1 \quad V_{II} = B_2$$

$$B_2 = A_1 a + V_1$$

h. $z = a + t \quad V_{II} = V_{III}$

$$V_{II} = B_2 \quad V_{III} = A_3(a + t - d) + V_2 \rightarrow A_3 a + V_1 = A_3(a + t - d) + V_2$$

$$A_3 = \frac{V_1 - V_2}{t - d} \quad B_2 = V_1 + \frac{V_1 - V_2}{t - d} a$$

$$V_{II} = V_1 + \frac{V_1 - V_2}{t - d} a$$

□

Ejemplo 32.

Dos planos conductores en el aire se ubican en $\varphi = 0^\circ$ y $\varphi = 90^\circ$. Si:

a. $V = 0$ en $\varphi = 30^\circ$

b. $|E| = 2000 \left[\frac{V}{m} \right]$ en $(5 [cm], 12,8^\circ)$

hallar el potencial y el campo eléctrico.

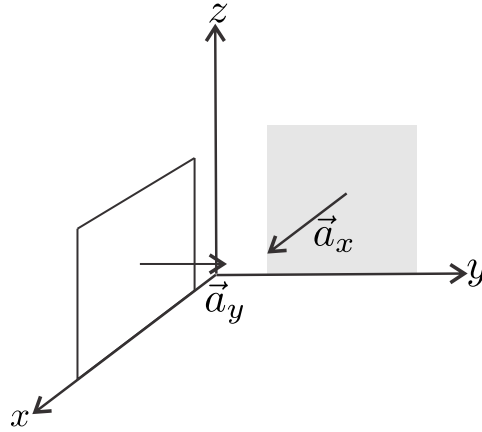
SOLUCIÓN

Figura 3.63 Ejemplo 29.

La solución a la ecuación de Laplace en este caso es:

$$V = A\varphi + B \quad \mathbb{E} = -\frac{A}{r}\vec{a}_\varphi \quad (3.173)$$

a. $\varphi = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \quad V = 0$

La condición anterior remplazada en el potencial de la Ec. (3.173) lleva a:

$$0 = A\frac{\pi}{6} + B \quad B = -A\frac{\pi}{6}$$

entonces:

$$V = A\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) \quad (3.174)$$

$$\mathbb{E} = 2000 \left[\frac{V}{m} \right]$$

$$\rightarrow \begin{cases} r = 5 \times 10^{-2} [m] \\ \varphi = \frac{12,8 \times \pi}{180} \end{cases}$$

$$E = \pm \sqrt{\left(-\frac{A}{r}\right)^2} = \pm \frac{A}{r} \quad A = \pm Er = 2000 \times 5 \times 10^{-2} = \pm 100$$

Después de remplazar en la Ec. (3.173) para el campo eléctrico y en la Ec. (3.174) para el potencial eléctrico, se obtiene:

$$A = 100 \rightarrow V = 100\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) \rightarrow \mathbb{E} = -\frac{100}{r}\vec{a}_\varphi \quad \square$$

$$A = -100 \rightarrow V = 100 \left(\frac{\pi}{6} - \varphi \right) \rightarrow \mathbb{E} = \frac{100}{r} \vec{a}_\varphi \quad \square$$

Ejemplo 33.

Tres bolas pequeñas idénticas de masa m están suspendidas desde un mismo punto por tres alambres no conductores de masa despreciable, cuya longitud es ℓ . En el equilibrio las tres bolas forman un triángulo equilátero de lado a . ¿Cuál es la carga Q que tiene cada una de las bolas?

SOLUCIÓN

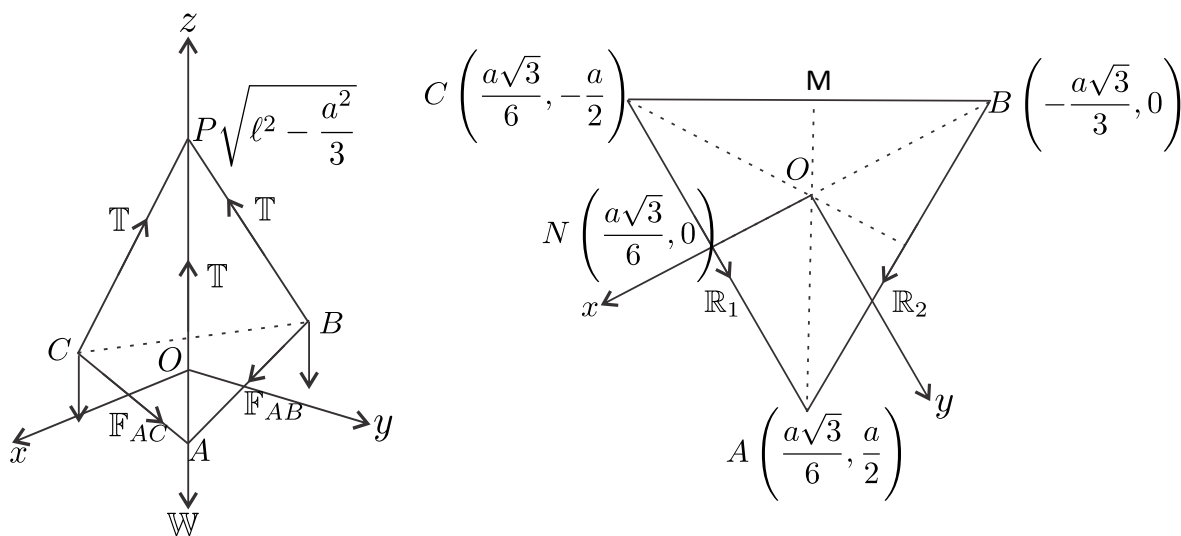


Figura 3.64 Ejemplo 33

O es el punto de corte de las medianas se llama el baricentro o centroide, o sea, el centro de gravedad del triángulo. En el caso de un triángulo equilátero coincide con el de las alturas (ortocentro), mediatrices (circuncentro) o bisectrices (incentro). Este punto de corte de las medianas ocurre a dos tercios de una de ellas a partir del vértice.

$$\overline{AM} = a \sin \frac{\pi}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \rightarrow \overline{OA} = \frac{2}{3} \overline{AM} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\overline{MO} = \overline{MA} - \overline{OA} = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{En el triángulo } AOP: z = \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} \right)^2} = \sqrt{\ell^2 - \frac{a^2}{3}}$$

$$\mathbb{R}_1 = \frac{a}{2} (\sqrt{3}\vec{a}_x + \vec{a}_y) \rightarrow \vec{a}_{R_1} = \frac{\sqrt{3}\vec{a}_x + \vec{a}_y}{2}$$

$$\mathbb{R}_2 = \frac{a}{2} (\sqrt{3}\vec{a}_x - \vec{a}_y) \rightarrow \vec{a}_{R_2} = \frac{\sqrt{3}\vec{a}_x - \vec{a}_y}{2}$$

$$\mathbb{R}_3 = -\frac{a\sqrt{3}}{3}\vec{a}_x + \sqrt{\ell^2 - \frac{a^2}{3}}\vec{a}_z \rightarrow R_3 = \ell$$

$$\vec{a}_{R_3} = -\frac{a\sqrt{3}}{3\ell}\vec{a}_x + \sqrt{1 - \frac{a^2}{3\ell^2}}\vec{a}_z$$

Aplicando la segunda ley de Newton en el punto A, se tiene:

$$\mathbb{T} + \mathbb{F}_{AB} + \mathbb{F}_{AC} + \mathbb{W} = 0 \quad (3.175)$$

Las fuerzas eléctricas sobre la carga situada en el punto A son:

$$\mathbb{F}_{AB} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \frac{\sqrt{3}\vec{a}_x - \vec{a}_y}{2} \quad \mathbb{F}_{AC} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \frac{\sqrt{3}\vec{a}_x + \vec{a}_y}{2}$$

La tensión en el alambre es:

$$\mathbb{T} = T \left[-\frac{a\sqrt{3}}{3\ell}\vec{a}_x + \sqrt{1 - \frac{a^2}{3\ell^2}}\vec{a}_z \right]$$

El peso de la carga ubicada en A es:

$$\mathbb{W} = m\mathbf{g}(-\vec{a}_z)$$

Por lo tanto:

$$-\frac{a\sqrt{3}}{3\ell}\vec{a}_x + \sqrt{1 - \frac{a^2}{3\ell^2}}\vec{a}_z + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \frac{\sqrt{3}\vec{a}_x - \vec{a}_y}{2} + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \frac{\sqrt{3}\vec{a}_x + \vec{a}_y}{2} - m\mathbf{g}\vec{a}_z = 0$$

$$-\frac{a\sqrt{3}}{3\ell}T + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}\sqrt{3} = 0 \quad (3.176)$$

$$T\sqrt{1 - \frac{a^2}{3\ell^2}} - m\mathbf{g} = 0 \quad (3.177)$$

Si se dividen miembro a miembro las Ecs. (3.176) y (3.177):

$$\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2 m\mathbf{g}} = \frac{Ta}{3\ell} \frac{1}{T\sqrt{1 - \frac{a^2}{3\ell^2}}} \quad Q^2 = \frac{4\pi\epsilon_0 a^3 m\mathbf{g}}{\sqrt{9\ell^2 - 3a^2}}$$

Finalmente:

$$Q = \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 a^3 mg}{\sqrt{9\ell^2 - 3a^2}}}$$

□

Ejemplo 34.

Un aro circular metálico de radio a , constituido por un hilo conductor de sección transversal despreciable comparada con a tiene una densidad longitudinal de carga $\lambda = \lambda_0 \sin \frac{\varphi}{2}$. Hallar el potencial y el campo eléctrico en $(0, 0, z)$.

SOLUCIÓN

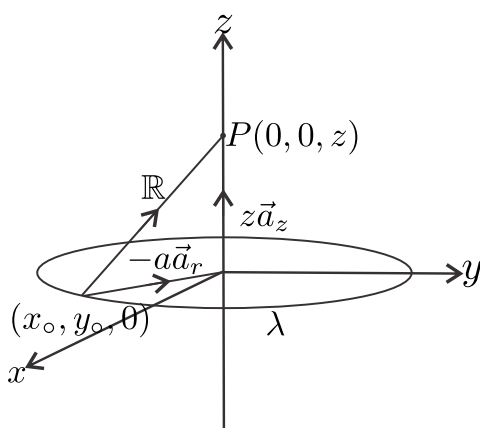


Figura 3.65 Ejemplo 34.

$$dQ = \lambda dl = a\lambda_0 \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi \quad \mathbb{R} = -a\vec{a}_r + z\vec{a}_z \quad R = \sqrt{a^2 + z^2}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{dQ}{R}$$

$$V = \frac{a\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \frac{\varphi}{2} d\varphi}{\sqrt{a^2 + z^2}} \quad V = \frac{a\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}} \int_0^{2\pi} \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi \rightarrow \begin{cases} u = \frac{\varphi}{2} & d\varphi = 2du \\ \varphi = 0 & u = 0 \\ \varphi = 2\pi & u = \pi \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = 2 \int_0^{\pi} \sin u du = 4$$

$$V = \frac{a\lambda_0}{\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}}$$

□

$$\mathbb{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C dQ \frac{\mathbb{R}}{R^3}$$

$$\mathbb{E} = \frac{a\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{(-a\vec{a}_r + z\vec{a}_z) \sin\frac{\varphi}{2} d\varphi}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathbb{E} = \frac{a\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} [-a(\cos\varphi\vec{a}_x + \sin\varphi\vec{a}_y) + z\vec{a}_z] \sin\frac{\varphi}{2} d\varphi$$

Se utiliza el mismo cambio de variable para solucionar las integrales anteriores.

$$-a \int_0^{2\pi} \cos\varphi \sin\frac{\varphi}{2} d\varphi = -2a \int_0^\pi \cos 2u \sin u du = -2a \int_0^\pi (\cos^2 u - 1) \sin u du = \frac{4a}{3}$$

$$-a \int_0^{2\pi} \sin\varphi \sin\frac{\varphi}{2} d\varphi = -2a \int_0^\pi \sin^2 u \cos u du = 0$$

$$\mathbb{E} = \frac{a\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{4a}{3} \vec{a}_x + 4z\vec{a}_z \right)$$

$$\mathbb{E} = \frac{a\lambda_0}{\pi\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{a}{3} \vec{a}_x + z\vec{a}_z \right) \quad \square$$

Ejemplo 35.

Considere dos cilindros coaxiales de radios interior a y exterior b . Si existe una diferencia de potencial V_0 entre ellos, determinar la relación que hace que el campo de mayor magnitud sea mínimo. Suponga que b es fijo.

SOLUCIÓN

En este caso la solución a la ecuación de Laplace es:

$$V = A \ln r + B \quad \mathbb{E} = -\frac{A}{r} \vec{a}_r$$

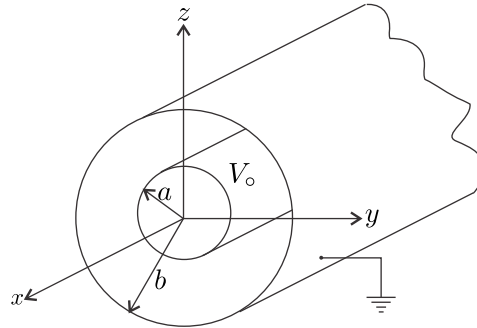


Figura 3.66 Ejemplo 35.

a. $r = b \quad V = 0$

$$0 = A \ln b + B \rightarrow B = -A \ln b$$

Así: $V = A \ln \frac{r}{b}$

b. $r = a \quad V = V_o$

$$V_o = A \ln \frac{a}{b} \rightarrow A = \frac{V_o}{\ln \frac{a}{b}}$$

Por lo tanto:

$$V = \frac{V_o \ln \frac{r}{b}}{\ln \frac{a}{b}} \rightarrow \mathbb{E} = -\frac{V_o}{r \ln \frac{a}{b}} \vec{a}_r$$

En $r = a$ se presenta el campo de mayor magnitud.

$$\mathbb{E} = -\frac{V_o}{a \ln \frac{a}{b}} \vec{a}_r = \frac{V_o}{a \ln \frac{a}{b}} \vec{a}_r = V_o \left[a \ln \frac{b}{a} \right]^{-1} \vec{a}_r \rightarrow E = V_o \left[a \ln \frac{b}{a} \right]^{-1}$$

de donde, se obtiene:

$$\frac{\partial E}{\partial a} = V_o \left[a \ln \frac{b}{a} \right]^{-2} \left(\ln \frac{b}{a} - 1 \right) \rightarrow \ln \frac{b}{a} = 1 = \ln e \rightarrow e = \frac{b}{a}$$

$$\mathbb{E} = -\frac{V_o}{r \ln \frac{a}{b}} \vec{a}_r = \frac{V_o}{r \ln \frac{b}{a}} \vec{a}_r$$

$$\mathbb{E} = \frac{V_o}{r} \vec{a}_r$$

□

Ejemplo 36.

Dos placas paralelas muy largas en las direcciones x y z están a potencial cero. Otra placa en $x = 0$, muy larga en la dirección z está separada de las otras dos por una abertura muy pequeña y a $V_o [V]$, ver Fig. 3.67. Hallar el potencial y el campo eléctrico entre las placas.

SOLUCIÓN

La ecuación de Laplace en el volumen solicitado, tiene la siguiente forma de solución:

$$V = (A_1 \cos ky + A_2 \sen ky) (A_3 e^{kx} + A_4 e^{-kx}) \quad (3.178)$$

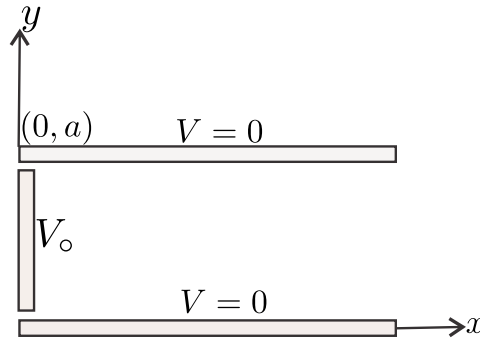


Figura 3.67 Ejemplo 36.

Para determinar las constantes se aplican las condiciones de frontera:

a. $y = 0 \quad V = 0$

$$A_1 (A_3 e^{kx} + A_4 e^{-kx}) = 0 \quad (3.179)$$

La Ec. (3.179) es válida para cualquier valor de x , por lo que:

$$A_1 = 0 \quad (3.180)$$

La Ec. (3.178) toma la siguiente forma:

$$V = A_2 \operatorname{sen} ky (A_3 e^{kx} + A_4 e^{-kx})$$

Se redefine: $A = A_2 A_3$ y $B = A_2 A_4$, entonces:

$$V = \operatorname{sen} ky (A e^{kx} + B e^{-kx}) \quad (3.181)$$

b. $y = a \quad V = 0$

La anterior condición de frontera se remplaza en la Ec. (3.181):

$$\operatorname{sen} ka (A e^{kx} + B e^{-kx}) = 0 \quad (3.182)$$

La Ec. (3.182) es válida para cualquier valor de x , por lo que:

$$ka = m\pi \quad k = \frac{m\pi}{a} \quad (3.183)$$

donde $m = 1, 2, 3, \dots, \infty$

Si el valor de k se sustituye en la Ec. (3.183), se obtiene:

$$V = \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{a} \left(A e^{\frac{m\pi x}{a}} + B e^{-\frac{m\pi x}{a}} \right) \quad (3.184)$$

La Ec. (3.184), es válida para un sólo valor de m ; puesto que son varios los valores de m que satisfacen la Ec. (3.184), se tiene:

$$V = \sum_1^{\infty} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{a} \left(A_m e^{\frac{m\pi x}{a}} + B_m e^{-\frac{m\pi x}{a}} \right) \quad (3.185)$$

c. $x \rightarrow \infty$ V es finito

Esta condición se remplaza en la Ec. (3.185) y se obtiene:

$$A_m = 0 \quad (3.186)$$

La Ec. (3.185) toma la siguiente forma:

$$V = \sum_1^{\infty} B_m e^{-\frac{m\pi x}{a}} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{a} \quad (3.187)$$

d. $x = 0$ $V = V_0$

Esta condición se remplaza en la Ec. (3.187) y se tiene:

$$V_0 = \sum_1^{\infty} B_m \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{a} \quad 0 \leq y \leq a \quad (3.188)$$

La sumatoria debe converger a V_0 , entonces, para evaluar los coeficientes B_m , se tienen en cuenta algunas propiedades ortogonales de las funciones trigonométricas:

i.

$$\int_c^{c+T} \operatorname{sen} m x \cos n x dx = 0 \quad (3.189)$$

ii.

$$\int_c^{c+T} \operatorname{sen} m x \operatorname{sen} n x dx \begin{cases} \neq 0 & \text{si } m = n \\ = 0 & \text{si } m \neq n \end{cases} \quad (3.190)$$

iii.

$$\int_c^{c+T} \cos mx \cos nx dx \begin{cases} \neq 0 & \text{si } m = n \\ = 0 & \text{si } m \neq n \end{cases} \quad (3.191)$$

Se dice que $\sin mx$ y $\sin nx$ o $\cos mx$ y $\cos nx$ son ortogonales cuando $m \neq n$, porque las integrales se anulan.

Si ambos miembros de la Ec. (3.188) se multiplican por $\sin \frac{n\pi y}{a} dy$ y se integra de 0 a a , se tiene:

$$\begin{aligned} \int_0^a V_o \sin \frac{n\pi y}{a} dy &= \sum_1^\infty \int_0^a B_m \sin \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} dy \\ \int_0^a V_o \sin \frac{n\pi y}{a} dy &= \frac{2aV_o}{n\pi} \quad \therefore n = 1, 3, 5, \dots, \infty \\ B_m \int_0^a \sin \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} dy &= \frac{aB_m}{2} \quad \therefore m = 0, 1, 2, \dots, \infty \end{aligned}$$

Para $m = n$:

$$\frac{aB_m}{2} = \frac{2aV_o}{n\pi}$$

$$B_m = \frac{4V_o}{n\pi} \quad (3.192)$$

Si la Ec. (3.192) se reemplaza en la Ec. (3.187), se obtiene la solución para el potencial en la región pedida:

$$V = \frac{4V_o}{\pi} \sum_1^\infty \frac{e^{-\frac{n\pi x}{a}} \sin \frac{n\pi y}{a}}{n} \quad \square$$

El campo eléctrico se obtiene a partir del gradiente negativo del potencial eléctrico.

$$\mathbb{E} = \frac{4V_o}{a} \sum_1^\infty e^{-\frac{n\pi x}{a}} \left(\sin \frac{n\pi y}{a} \vec{a}_x - \cos \frac{n\pi y}{a} \vec{a}_y \right) \quad \square$$

Ejemplo 37.

Hallar el potencial y el campo electrostático para el volumen que está en el interior de la cubeta rectangular mostrada en la Fig. 3.68.

SOLUCIÓN

La ecuación de Laplace, en el volumen solicitado tiene la siguiente forma de solución:

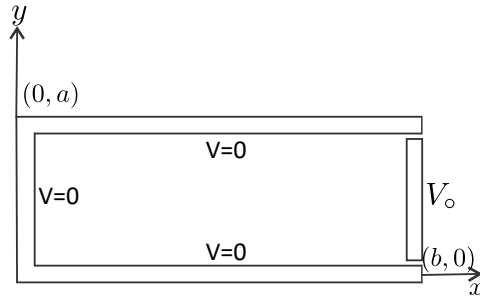


Figura 3.68 Ejemplo 37.

$$V = (A_1 \sinh kx + A_2 \cosh kx) (A_3 \cos ky + A_4 \senky) \quad (3.193)$$

Para determinar las constantes se aplican las condiciones de frontera:

a. $y = 0 \quad V = 0$

$$0 = A_3 (A_1 \sinh kx + A_2 \cosh kx) \quad (3.194)$$

La Ec. (3.194) es válida para cualquier valor de x , por lo que:

$$A_3 = 0 \quad (3.195)$$

La Ec. (3.193) toma la siguiente forma:

$$V = A_4 (A_1 \sinh kx + A_2 \cosh kx) \senky$$

Se redefine: $A = A_1 A_4$ y $B = A_2 A_4$, entonces:

$$V = (A \sinh kx + B \cosh kx) \senky \quad (3.196)$$

b. $y = a \quad V = 0$

Esta condición de frontera se reemplaza en la Ec. (3.196):

$$0 = (A \sinh kx + B \cosh kx) \senak \quad (3.197)$$

La Ec. (3.197) es válida para cualquier valor de x , por lo que:

$$ak = m\pi \quad k = \frac{m\pi}{a} \quad (3.198)$$

donde $m = 1, 2, 3, \dots, \infty$

Si el valor de k se sustituye en la Ec. (3.196), se obtiene:

$$V = \left(A \sinh \frac{m\pi x}{a} + B \cosh \frac{m\pi x}{a} \right) \sen \frac{m\pi y}{a} \quad (3.199)$$

La Ec. (3.199), es válida para un sólo valor de m ; puesto que son varios los valores de m que satisfacen la Ec. (3.199), por superposición se tiene:

$$V = \sum_1^{\infty} \left(A_m \sinh \frac{m\pi x}{a} + B_m \cosh \frac{m\pi x}{a} \right) \sen \frac{m\pi y}{a} \quad (3.200)$$

$$c. \quad x = 0 \quad V = 0$$

$$\sum_1^{\infty} \left(A_m \sinh \frac{m\pi 0}{a} + B_m \cosh \frac{m\pi 0}{a} \right) \sen \frac{m\pi y}{a} = 0$$

$$\sum_1^{\infty} B_m \sen \frac{m\pi y}{a} = 0$$

$$B_m = 0 \quad (3.201)$$

La Ec. (3.200) toma la siguiente forma:

$$V = \sum_1^{\infty} A_m \sinh \frac{m\pi x}{a} \sen \frac{m\pi y}{a} \quad (3.202)$$

$$d. \quad x = b \quad V = V_o$$

En la Ec. (3.202), se tiene:

$$V_o = \sum_1^{\infty} A_m \sinh \frac{m\pi x}{a} \sen \frac{m\pi y}{a} \quad 0 \leq y \leq a \quad (3.203)$$

La sumatoria debe converger a V_o . Si ambos miembros de la Ec. (3.203) se multiplican por $\sen \frac{n\pi y}{a} dy$ y se integra de 0 a a , se tiene, para $m = n$:

$$V_o \int_0^a \sen \frac{n\pi y}{a} dy = \frac{2aV_o}{n\pi}$$

$$A_m \sinh \frac{m\pi b}{a} \int_0^a \sen \frac{m\pi y}{a} \sen \frac{n\pi y}{a} dy = \frac{aA_m}{2} \sinh \frac{m\pi b}{a}$$

$$\frac{aA_m}{2} \sinh \frac{m\pi b}{a} = \frac{2aV_o}{n\pi} \rightarrow A_m = \frac{4V_o}{n\pi \sinh \frac{n\pi b}{a}}$$

O sea, para $n = m = 1, 3, 5, \dots, \infty$. Si el valor de A_m , se remplaza en la Ec. (3.202), se obtiene el valor para el potencial en el volumen solicitado. Por lo tanto:

$$V = \frac{4V_o}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{\sinh \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{a}}{m \sinh \frac{m\pi b}{a}} \quad \square$$

El campo eléctrico se obtiene a partir del gradiente negativo del potencial eléctrico:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -\frac{4V_o}{a} \sum_1^{\infty} \frac{\cosh \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a}}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} & \frac{\partial V}{\partial y} &= -\frac{4V_o}{a} \sum_1^{\infty} \frac{\sinh \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{a}}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} \\ \mathbb{E} &= \frac{4V_o}{a} \left[\sum_1^{\infty} \frac{\cosh \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a}}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} \vec{a}_x + \sum_1^{\infty} \frac{\sinh \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{a}}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} \vec{a}_y \right] \quad \square \end{aligned}$$

Ejemplo 38.

Un cilindro conductor muy largo, descargado, de radio a se coloca con su eje perpendicular a un campo eléctrico uniforme $\mathbb{E} = -E_o \vec{a}_y$. Hallar:

- la carga positiva inducida en el conductor.
- el potencial eléctrico en puntos exteriores al cilindro.
- el campo eléctrico en puntos exteriores al cilindro.

SOLUCIÓN

$$V_1 = \left(A_1 r + \frac{B_1}{r} \right) (C_1 \cos \varphi + D_1 \sin \varphi) \quad (3.204)$$

$$V_2 = \left(A_2 r + \frac{B_2}{r} \right) (C_2 \cos \varphi + D_2 \sin \varphi) \quad (3.205)$$

- a. $r \rightarrow 0$ V_1 es finito

$$V_1 = \left(A_1 0 + \frac{B_1}{0} \right) (C_1 \cos \varphi + D_1 \sin \varphi)$$

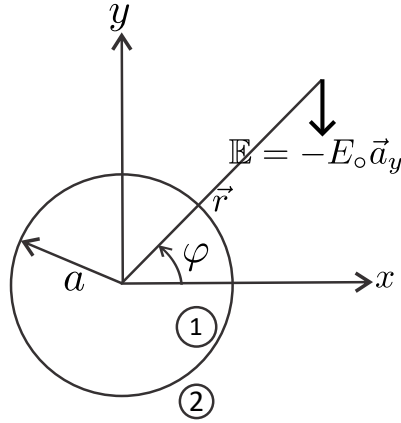


Figura 3.69 Ejemplo 38.

Para que se satisfaga la condición de frontera:

$$B_1 = 0 \quad (3.206)$$

Si el valor de la Ec. (3.206), se reemplaza en la Ec. (3.204):

$$V_1 = A_1(C_1 \cos \varphi + D_1 \sin \varphi)r \quad (3.207)$$

Se redefine:

$$A = A_1 C_1 \quad \text{y} \quad B = A_1 D_1$$

Por lo tanto, para la Ec. (3.207) se tiene:

$$V_1 = (A \cos \varphi + B \sin \varphi)r \quad (3.208)$$

$$\text{b.} \quad r \rightarrow \infty \quad \mathbb{E} = E_o \vec{a}_y = -\frac{dV_2}{dy} \vec{a}_y$$

$$dV_2 = E_o dy \rightarrow V_2 = E_o y + k$$

Si se reemplaza el valor correspondiente de y en coordenadas cilíndricas, se tiene:

$$V_2 = E_o r \sin \varphi + k \quad (3.209)$$

También:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V_2 = \left(A_2 \infty + \frac{B_2}{\infty} \right) (C_2 \cos \varphi + D_2 \sin \varphi)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V_2 = (C_2 \cos \varphi + D_2 \operatorname{sen} \varphi) A_2 r \quad (3.210)$$

Se redefine:

$$C = A_2 C_2 \quad F = A_2 D_2 \quad (3.211)$$

Por lo tanto, para la Ec. (3.210) se tiene:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V_2 = (C \cos \varphi + F \operatorname{sen} \varphi) r \quad (3.212)$$

Al igualar las Ecs. (3.209) y (3.212), se tiene:

$$(C \cos \varphi + F \operatorname{sen} \varphi) r = E_o r \operatorname{sen} \varphi + k \quad (3.213)$$

De las Ecs. (3.211) y (3.213) se concluye:

$$k = 0 \quad C = 0 \quad F = E_o \quad \text{y} \quad A_2 \neq 0 \quad C_2 = 0$$

La Ec. (3.205) se puede reescribir como:

$$V_2 = \left(A_2 r + \frac{B_2}{r} \right) D_2 \operatorname{sen} \varphi \quad (3.214)$$

De donde $F = A_2 D_2 = E_o$ y se redefine $G = B_2 D_2$, por lo tanto, para la Ec. (3.214), se tiene:

$$V_2 = \left(E_o r + \frac{G}{r} \right) \operatorname{sen} \varphi = \left(E_o + \frac{G}{r^2} \right) r \operatorname{sen} \varphi \quad (3.215)$$

$$\text{c.} \quad r = a \quad V_1 = V_2$$

$$(A \cos \varphi + B \operatorname{sen} \varphi) a = \left(E_o + \frac{G}{a^2} \right) a \operatorname{sen} \varphi$$

De donde se concluye

$$A = 0 \quad B = E_o + \frac{G}{a^2}$$

La Ec. (3.208), finalmente adopta la siguiente forma:

$$V_1 = B r \operatorname{sen} \varphi \quad (3.216)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial r} = B \operatorname{sen} \varphi \quad \frac{1}{r} \frac{\partial V_1}{\partial \varphi} = B \cos \varphi$$

El campo eléctrico se obtiene a partir del gradiente negativo del potencial eléctrico. Por lo tanto:

$$\mathbb{E}_1 = -B (\operatorname{sen} \varphi \vec{a}_r + \cos \varphi \vec{a}_\varphi) \quad (3.217)$$

d. $r \leq a \quad \mathbb{E}_1 = 0$

$B = 0$, entonces:

$$V_1 = 0 \quad \mathbb{E}_1 = 0 \quad \square$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial r} = \left(E_o - \frac{G}{r^2}\right) \operatorname{sen} \varphi \quad \frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial \varphi} = \left(E_o + \frac{G}{r^2}\right) \cos \varphi$$

$$\mathbb{E}_2 = -\left(E_o - \frac{G}{r^2}\right) \operatorname{sen} \varphi \vec{a}_r - \left(E_o + \frac{G}{r^2}\right) \cos \varphi \vec{a}_\varphi$$

e. $r = a \quad \mathbb{E}_2 = E_2 \vec{a}_r$

$$E_o + \frac{G}{a^2} = 0 \quad \therefore \quad G = -a^2 E_o$$

$$V_2 = \left[1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2\right] E_o r \operatorname{sen} \varphi \quad \square$$

$$\mathbb{E}_2 = -\left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2\right] E_o \operatorname{sen} \varphi \vec{a}_r - \left[1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2\right] E_o \cos \varphi \vec{a}_\varphi \quad \square$$

f. $r = a \rightarrow E_{2r} \neq 0 \quad \text{y} \quad E_{2\varphi} = 0$

$$\mathbb{E}_2 = -2E_o \operatorname{sen} \varphi \vec{a}_r = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} \vec{a}_r \rightarrow \sigma = -2\varepsilon_o E_o \operatorname{sen} \varphi$$

$$Q = \int_S \sigma dS = -2a\varepsilon_o E_o \int_\pi^{2\pi} \operatorname{sen} \varphi d\varphi \int_0^\ell dz$$

$$Q = 4a\varepsilon_o E_o \ell \quad \square$$

Ejemplo 39.

Una esfera conductora de radio a , descargada se coloca en un campo eléctrico uniforme $\mathbb{E} = -E_o \vec{a}_z$. Hallar:

- la carga positiva inducida en el conductor.
- el potencial eléctrico en puntos interiores y exteriores a la esfera.

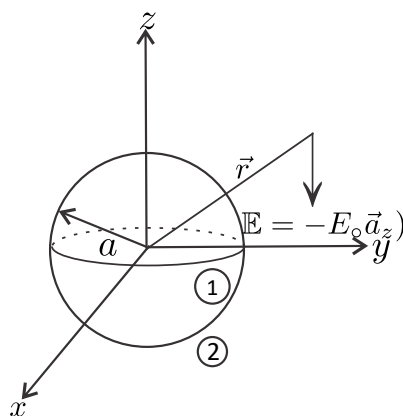


Figura 3.70 Ejemplo 39.

iii. el campo eléctrico en puntos interiores y exteriores a la esfera.

SOLUCIÓN

$$V_1 = \left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2} \right) \cos \theta \quad (3.218)$$

$$V_2 = \left(A_2 r + \frac{B_2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (3.219)$$

a. $r \rightarrow 0$ V_1 es finito

De la Ec. (3.218) $V_1 = \left(A_1 0 + \frac{B_1}{0} \right) \cos \theta$: $B_1 = 0$, de este modo:

$$V_1 = A_1 r \cos \theta \quad (3.220)$$

b. $r \rightarrow \infty$ $\mathbb{E}_2 = -E_o \vec{a}_z = -\frac{dV_2}{dz} \vec{a}_z$

$$dV_2 = E_o dz \rightarrow V_2 = E_o z + k$$

Si se remplaza el valor correspondiente de z en coordenadas esféricas, se tiene:

$$V_2 = E_o r \cos \theta + k \quad (3.221)$$

También:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V_2 = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(A_2 r + \frac{B_2}{r^2} \right) \cos \theta = A_2 r \cos \theta \quad (3.222)$$

Al igualar las Ecs. (3.221) y (3.222):

$$E_o r \cos \theta + k = A_2 r \cos \theta \quad (3.223)$$

De la Ec. (3.223) se concluye:

$$k = 0 \quad A_2 = E_o, \forall \cos \theta \neq 0 \quad \text{entonces:}$$

$$V_2 = \left(E_o r + \frac{B_2}{r^2} \right) \cos \theta = \left(E_o + \frac{B_2}{r^3} \right) r \cos \theta \quad (3.224)$$

$$c. \quad r = a \quad V_1 = V_2$$

$$V_1 = A_1 r \cos \theta \quad \rightarrow \quad V_1 = A_1 a \cos \theta$$

$$V_2 = \left(E_o + \frac{B_2}{r^3} \right) r \cos \theta \quad \rightarrow \quad V_2 = \left(E_o + \frac{B_2}{a^3} \right) a \cos \theta$$

$$A_1 a \cos \theta = \left(E_o + \frac{B_2}{a^3} \right) a \cos \theta$$

$$A_1 = E_o + \frac{B_2}{a^3} \quad \forall \cos \theta \neq 0 \quad (3.225)$$

De la Ec. (3.220)

$$\frac{\partial V_1}{\partial r} = A_1 \cos \theta \quad \frac{1}{r} \frac{\partial V_1}{\partial \theta} = -A_1 \sin \theta$$

$$\mathbb{E}_1 = A_1 (-\cos \theta \vec{a}_r + \sin \theta \vec{a}_\theta) \quad (3.226)$$

El campo eléctrico en el interior de un conductor es cero, así $A_1 = 0$, por lo tanto:

$$V_1 = 0 \quad \mathbb{E}_1 = 0$$

Si $A_1 = 0$ se remplace en la Ec. (3.225):

$$E_o + \frac{B_2}{a^3} = 0$$

$$B_2 = -a^3 E_o \quad (3.227)$$

Si se reemplaza la Ec. (3.227) en la Ec. (3.224), se tiene:

$$V_2 = \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] E_o r \cos \theta \quad \square$$

De la ecuación anterior:

$$\frac{\partial V_2}{\partial r} = \left[1 + 2 \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] E_o \cos \theta \quad \frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial \theta} = - \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] E_o \sin \theta$$

$$\mathbb{E}_2 = - \left[1 + 2 \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] E_o \cos \theta \vec{a}_r + \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] E_o \sin \theta \vec{a}_\theta$$

$$\mathbb{E}_2 = -E_o (\cos \theta \vec{a}_r - \sin \theta \vec{a}_\theta) - \left(\frac{a}{r} \right)^3 E_o (2 \cos \theta \vec{a}_r + \sin \theta \vec{a}_\theta)$$

$$\mathbb{E}_2 = -E_o \vec{a}_z - \left(\frac{a}{r} \right)^3 E_o (2 \cos \theta \vec{a}_r + \sin \theta \vec{a}_\theta) \quad \square$$

d. El campo electrico debido a un dipolo es $\mathbb{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_o r^3} (2 \cos \theta \vec{a}_r + \sin \theta \vec{a}_\theta)$

De este modo $\frac{p}{4\pi\epsilon_o r^3} = - \left(\frac{a}{r} \right)^3 E_o \rightarrow p = -4\pi\epsilon_o a^3 E_o \quad \square$

e. En $r = a \rightarrow E_{2r} \neq 0$ y $E_{2\theta} = 0$

$$\mathbb{E}_2 = -3E_o \cos \theta \vec{a}_r = \frac{\sigma}{\epsilon_o} \vec{a}_r \rightarrow \sigma = -3\epsilon_o E_o \cos \theta$$

$$Q = \int_S \sigma dS = -3a^2 \epsilon_o E_o \int_{\pi}^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta$$

$$Q = 3\pi a^2 \epsilon_o E_o \quad \square$$

Ejemplo 40.

Un hemisferio conductor de radio a se coloca sobre una lámina conductora plana de extensión muy grande. Antes de que se colocara el hemisferio, el campo eléctrico en cualquier parte sobre la lámina era perpendicular a ella e igual a $\mathbb{E} = -E_o \vec{a}_z$. El medio es el aire y la lámina y el hemisferio están a un potencial cero. Hallar:

i. $V = V(r, \theta)$ para cualquier punto arriba de la lámina y el hemisferio.

ii. la densidad de carga superficial en los puntos situados sobre la superficie de la lámina y del hemisferio.

SOLUCIÓN

Se parte de la solución del campo eléctrico del ejemplo 39.

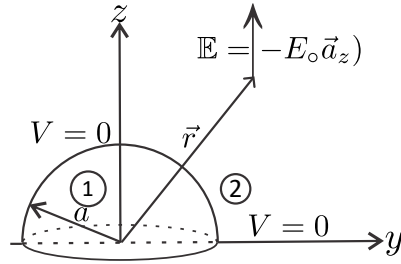


Figura 3.71 Ejemplo 40.

$$\text{i.} \quad V_2 = \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] E_o r \cos \theta$$

$$\text{En } r = a \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$V_2 = 0$$

□

$$\text{ii.} \quad \mathbb{E}_2 = - \left[1 + 2 \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] E_o \cos \theta \vec{a}_r + \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] E_o \sin \theta \vec{a}_\theta$$

$$\text{En } r \geq a \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\mathbb{E}_2 = \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] E_o \vec{a}_\theta = \frac{\sigma}{\epsilon_o} (-\vec{a}_\theta)$$

$$\sigma = -\epsilon_o E_o \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right]$$

□

Ejemplo 41.

El capacitor de placas planas paralelas consiste en dos láminas paralelas planas conductoras de área S separadas una distancia d , como se muestra en la Fig. 3.72, el medio tiene permitividad ϵ_o . La inferior está aterrizada y la superior a un potencial V_o . Hallar:

- El potencial entre las placas
- El campo eléctrico entre las placas.
- Las densidades de carga superficiales.
- La capacitancia del sistema.

SOLUCIÓN

En este caso la solución a la ecuación de Laplace es:

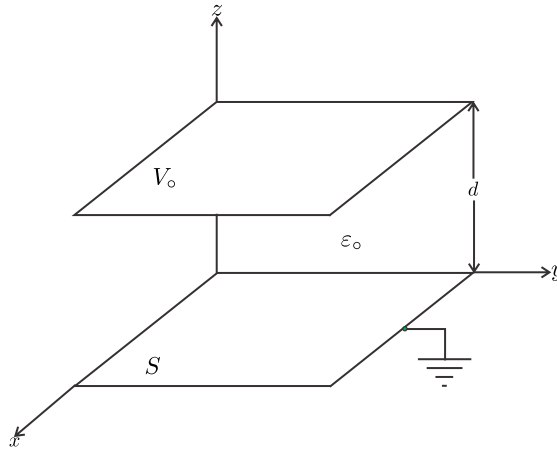


Figura 3.72 Ejemplo 41.

$$V = A_1 z + B_1 \quad (3.228)$$

$$\mathbb{E} = -A_1 \vec{a}_z \quad (3.229)$$

Si una diferencia de potencial se establece entre los conductores descargados, conectándolos a los bornes opuestos de una batería, ellos adquieren una carga de igual magnitud, pero naturaleza diferente. La carga se halla en las superficies opuestas.

a. $z = 0 \quad V = 0$

Esta condición se remplaza en la Ec. (3.228):

$$0 = A_1 (0) + B_1 \quad B_1 = 0$$

Por lo tanto, la Ec. (3.228) se puede reescribir así:

$$V = A_1 z \quad (3.230)$$

b. $z = d \quad V = V_o$

Esta condición se remplaza en la Ec. (3.230):

$$V_o = A_1 d \quad A_1 = \frac{V_o}{d}$$

El valor de A_1 se remplaza en las Ecs. (3.228) y (3.229) para obtener respectivamente el potencial eléctrico y el campo eléctrico.

$$V = \frac{V_o}{d}z \quad \mathbb{E} = -\frac{V_o}{d}\vec{a}_z \quad \square$$

Para calcular la capacitancia del sistema, se procede así, para la placa ubicada en $z = d$:

$$\mathbb{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}\vec{a}_N \quad \rightarrow \quad \vec{a}_N = -\vec{a}_z$$

$$\mathbb{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}(-\vec{a}_z) = -\frac{V_o}{d}\vec{a}_z \quad \rightarrow \quad \sigma = \frac{\varepsilon_o V_o}{d}$$

$$dQ = \sigma dS \quad \rightarrow \quad Q = \frac{\varepsilon_o V_o S}{d}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\varepsilon_o V_o S}{V_o d} = \frac{\varepsilon_o S}{d} \quad \square$$

La capacitancia depende de la geometría y del medio. El capacitor almacena energía en forma de campo eléctrico.

Ejemplo 42.

Una esfera sólida conductora de radio a tiene una carga $2Q$. Una concha esférica conductora de radio interior b y exterior c es concéntrica con la esfera sólida y tiene una carga $-Q$. Utilizar la ley de Gauss para hallar el campo eléctrico en todo el espacio y la distribución de carga sobre la concha cuando el sistema se encuentra en equilibrio electrostático.

SOLUCIÓN

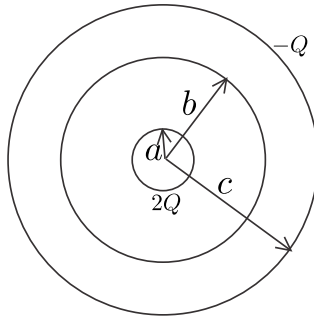


Figura 3.73 Ejemplo 42.

a. $r < a \quad Q_{enc} = 0$

$$\oint_S \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_o} \quad \rightarrow \quad \oint_S \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = E4\pi r^2 = 0$$

$$\mathbb{E} = 0$$

□

$$\text{b. } a < r < b \quad Q_{enc} = Q_a = 2Q$$

$$\oint_S \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_o} \rightarrow \oint_S \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = E4\pi r^2 = \frac{2Q}{\varepsilon_o}$$

$$\mathbb{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o r^2} \vec{a}_r$$

$$\text{c. } b < r < c \quad Q_{enc} = 0$$

$$\oint_S \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_o} \rightarrow \oint_S \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = E4\pi r^2 = 0$$

$$\mathbb{E} = 0$$

□

$$\text{d. } r > c \quad Q_{enc} = 2Q - Q = Q$$

$$\oint_S \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_o} \rightarrow \oint_S \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = E4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

$$\mathbb{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2} \vec{a}_r$$

□

$$Q_b + Q_c = -Q$$

$$Q_c = 2Q - Q = Q$$

□

Ejemplo 43.

Una carga Q se distribuye en una esfera de radio a con una densidad de carga volumétrica $\rho = A(a - r)$, A es una constante y r es la distancia al centro de la esfera. Hallar:

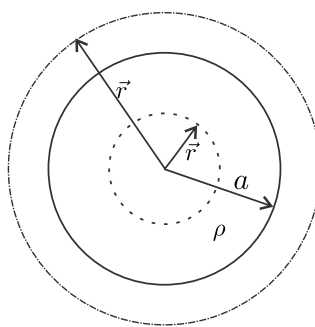


Figura 3.74 Ejemplo 43.

a. Valor de A

b. El potencial y el campo eléctrico en puntos exteriores a la esfera

- c. El potencial y el campo eléctrico en puntos interiores a la esfera
 d. Los valores del potencial en el centro y superficie de la esfera.

SOLUCIÓN

$$\text{a. } Q = \int_{\tau} \rho d\tau = A \int_0^a (a-r) r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$Q = 4\pi A \int_0^a (a-r) r^2 dr = 4\pi A \left(\frac{ar^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^a$$

$$Q = \frac{1}{3}\pi a^4 A \rightarrow A = \frac{3Q}{\pi a^4}$$

□

$$\text{b. } r > a \quad Q_{enc} = Q$$

$$\oint_S \mathbb{E}_2 \cdot d\mathbb{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \rightarrow \oint_S \mathbb{E}_2 \cdot d\mathbb{S} = E_2 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\mathbb{E}_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{a}_r \quad \vec{d\ell} = dr \vec{a}_r$$

$$dV = -\mathbb{E}_2 \cdot \vec{d\ell} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dr}{r^2} \rightarrow \int_{V_2}^0 dV = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2}$$

$$V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad \mathbb{E}_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{a}_r$$

□

$$\text{c. } r < a$$

$$Q_{enc} = \int_{\tau} \rho d\tau = \frac{3Q}{\pi a^4} 4\pi \int_0^a (a-r) r^2 dr \quad Q_{enc} = \frac{12Qr^3}{a^4} \left(\frac{a}{3} - \frac{r}{4} \right)$$

$$\oint_S \mathbb{E}_1 \cdot d\mathbb{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \rightarrow \oint_S \mathbb{E}_1 \cdot d\mathbb{S} = E_1 4\pi r^2 = \frac{12Qr^3}{\varepsilon_0 a^4} \left(\frac{a}{3} - \frac{r}{4} \right)$$

$$\mathbb{E}_1 = \frac{3Qr}{\pi\varepsilon_0 a^4} \left(\frac{a}{3} - \frac{r}{4} \right) \vec{a}_r \quad dV = -\mathbb{E}_1 \cdot \vec{d\ell} = -\mathbb{E}_1 \cdot dr \vec{a}_r$$

$$\text{Si } V_a = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}, \text{ entonces:}$$

$$\int_{V_1}^{V_a} dV = -\frac{Q}{\pi\varepsilon_0 a^4} \int_r^a \left(ar - \frac{3r^2}{4} \right) dr = -\frac{Q}{\pi\varepsilon_0 a^4} \left(\frac{ar^2}{2} - \frac{r^3}{4} \right) \Big|_r^a$$

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^4} (a^3 - 2ar^2 + r^3)$$

$$V_1 = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r^3}{a^4} - \frac{2r^2}{a^3} \right)$$

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{a} + \frac{r^3}{a^4} - \frac{2r^2}{a^3} \right) \quad \square$$

$$\mathbb{E}_1 = -\nabla V_1 = \frac{3Qr}{\pi\epsilon_0 a^4} \left(\frac{a}{3} - \frac{r}{4} \right) \vec{a}_r \quad \square$$

d. En $r = 0$

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \quad \square$$

e. En $r = a$

$$V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_{r=a} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$$\text{o también de } V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{a} + \frac{r^3}{a^4} - \frac{2r^2}{a^3} \right) \Big|_{r=a}$$

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \quad \square$$

Ejemplo 44.

Se tienen cuatro conductores separados y rodeados por otro conductor muy grande y aterrizado. Los potenciales de los conductores son V_A , V_B , V_C y V_D . Utilizar el principio de superposición y el teorema de la unicidad para determinar las capacitancias propias y mutuas de ellos o entre ellos.

SOLUCIÓN

El teorema de la unicidad establece que si se conocen los potenciales de los conductores el campo eléctrico se conoce en todo el sistema y lo mismo ocurre con las cargas en los conductores. La carga en la superficie interna que rodea a los conductores es $-(Q_A + Q_B + Q_C + Q_D)$. Se considerarán tres casos posibles del sistema:

$$\text{Caso I.} \quad V_A \neq 0 \quad V_B = V_C = V_D = 0$$

Las cargas en los conductores son proporcionales a V_A .

$$\begin{aligned} Q_A &= C_{AA}V_A & Q_B &= C_{AB}V_A \\ Q_C &= C_{AC}V_A & Q_D &= C_{AD}V_A \end{aligned}$$

Las constantes C_{AA} , C_{AB} , C_{AC} y C_{AD} dependen de la geometría, la disposición y el medio en que se encuentren los conductores.

$$\text{Caso II.} \quad V_B \neq 0 \quad V_A = V_C = V_D = 0$$

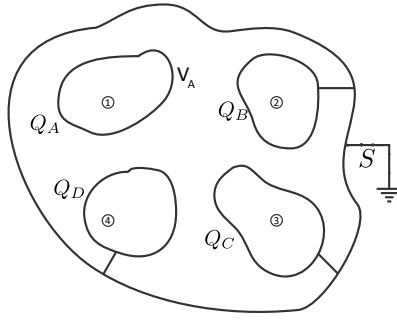


Figura 3.75 Ejemplo 44. Caso I

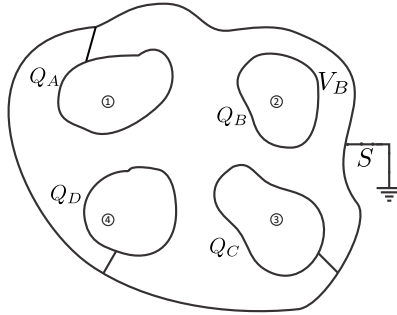


Figura 3.76 Ejemplo 44. Caso II

Las cargas en los conductores son proporcionales a V_B .

$$\begin{aligned} Q_A &= C_{BA}V_B & Q_B &= C_{BB}V_B \\ Q_C &= C_{BC}V_B & Q_D &= C_{BD}V_B \end{aligned}$$

Caso III. $V_C \neq 0$ $V_A = V_B = V_D = 0$

Las cargas en los conductores son proporcionales a V_C .

$$\begin{aligned} Q_A &= C_{CA}V_C & Q_B &= C_{CB}V_C \\ Q_C &= C_{CC}V_C & Q_D &= C_{CD}V_C \end{aligned}$$

Caso IV. $V_D \neq 0$ $V_A = V_B = V_C = 0$

El campo eléctrico y las cargas en los conductores son proporcionales a V_D .

El campo eléctrico y las cargas son proporcionales a V_D .

$$\begin{aligned} Q_A &= C_{DA}V_D & Q_B &= C_{DB}V_D \\ Q_C &= C_{DC}V_D & Q_D &= C_{DD}V_D \end{aligned}$$

Caso V.

$$V_A \neq 0 \quad V_B \neq 0 \quad V_C \neq 0 \quad V_D \neq 0$$

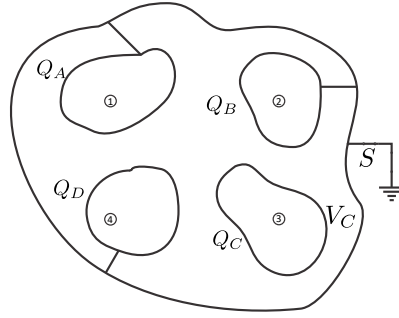


Figura 3.77 Ejemplo 44. Caso III

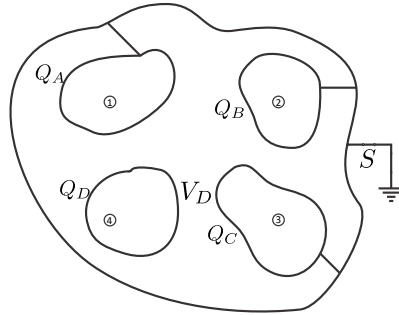


Figura 3.78 Ejemplo 44. Caso IV

La superposición de los casos anteriores es otro posible, donde los potenciales de los conductores ninguno es cero y la carga en cada uno de ellos es la suma de las cargas de los casos anteriores. A continuación, se muestra en forma matricial la relación entre las cargas y los potenciales.

De la Fig. 3.80, se tiene:

$$\begin{vmatrix} Q_A \\ Q_B \\ Q_C \\ Q_D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_{AA} & C_{AB} & C_{AC} & C_{AD} \\ C_{BA} & C_{BB} & C_{BC} & C_{BD} \\ C_{CA} & C_{CB} & C_{CC} & C_{CD} \\ C_{DA} & C_{DB} & C_{DC} & C_{DD} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \\ V_D \end{vmatrix}$$

En general: $|Q_i| = |C_{ij}| |V_i|$

C_{ij} : coeficientes de capacidad entre los conductores que ocupan las posiciones i y j .

Se demuestra más adelante que $C_{ij} = C_{ji}$.

También, se puede hallar V en función de Q : $|V_i| = |P_{ij}| |Q_i|$

P_{ij} : coeficientes de potencial.

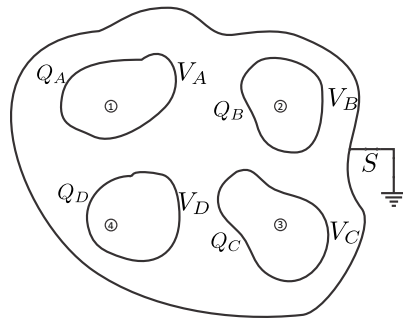


Figura 3.79 Ejemplo 44. Caso V

Ejemplo 45.

Hallar la carga positiva inducida en el plano de tierra debida a dos hilos conductores paralelos de sección transversal despreciables muy largos y con densidades de carga longitudinales 2λ y $-\lambda$, ver Fig. 3.80 y la carga inducida en una franja del plano de un metro de ancho.

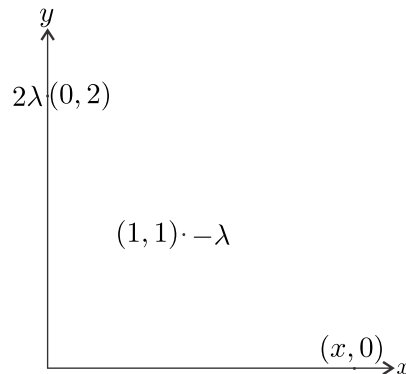
SOLUCIÓN

Figura 3.80 Ejemplo 45.

$$\vec{r}_1 = x\vec{a}_x - 2\vec{a}_y \quad \rightarrow \quad r_1 = (x^2 + 4)^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{r}_2 = (x - 1)\vec{a}_x - \vec{a}_y \quad \rightarrow \quad r_2 = [(x - 1)^2 + 1]^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{r}_3 = (x - 1)\vec{a}_x + \vec{a}_y \quad \rightarrow \quad r_3 = [(x - 1)^2 + 1]^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{r}_4 = x\vec{a}_x + 2\vec{a}_y \quad \rightarrow \quad r_4 = (x^2 + 4)^{\frac{1}{2}}$$

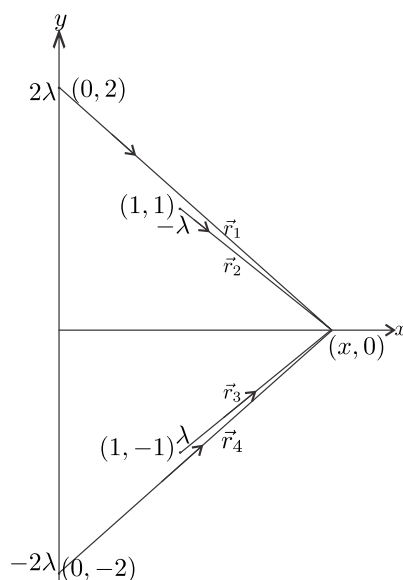


Figura 3.81 Geometría para el ejemplo 45.

El campo eléctrico debido a una línea es: $\mathbb{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{a}_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2}$

$$\mathbb{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{-[(x-1)\vec{a}_x - \vec{a}_y] + (x-1)\vec{a}_x + \vec{a}_y}{(x-1)^2 + 1} + 2 \left[\frac{x\vec{a}_x - 2\vec{a}_y - (x\vec{a}_x + 2\vec{a}_y)}{x^2 + 4} \right] \right\}$$

$$\mathbb{E} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(x-1)^2 + 1} - \frac{4}{x^2 + 4} \right] \vec{a}_y \quad \mathbb{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{a}_y$$

$$\sigma = \frac{\lambda}{\pi} \left[\frac{1}{(x-1)^2 + 1} - \frac{4}{x^2 + 4} \right]$$

Para determinar en el plano de tierra dónde están los cambios de densidad de carga superficial, se hace $\sigma = 0$. Por lo tanto:

$$\frac{1}{(x-1)^2 + 1} - \frac{4}{x^2 + 4} = 0 \rightarrow 3x^2 - 8x + 4 = (x-2)(3x-2) = 0$$

$$x_1 = 2 \text{ y } x_2 = \frac{2}{3}.$$

a. Entre $-\infty < x < \frac{2}{3}$, se toma el valor $x = 0$ para determinar cuál es la naturaleza de la carga, en esta franja.

$$\sigma = \frac{\lambda}{\pi} \left[\frac{1}{\frac{1}{2}} - 1 \right] = -\frac{1}{2} \frac{\lambda}{\pi} < 0, \text{ por lo tanto, entre } -\infty < x < \frac{2}{3} \text{ se encuentra carga}$$

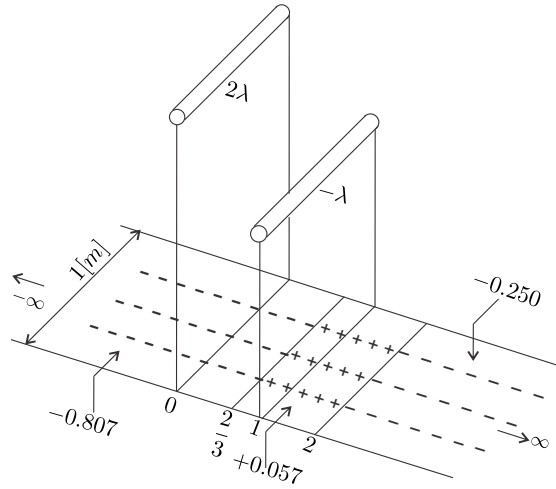


Figura 3.82 Cambios de densidad de carga superficial para el ejemplo 45.

de naturaleza negativa.

b. Entre $\frac{2}{3} < x < 2$, se toma el valor $x = 1$ para determinar cuál es la naturaleza de la carga, en esta franja.

$\sigma = \frac{\lambda}{\pi} \left[1 - \frac{4}{5} \right] = \frac{1}{5} \frac{\lambda}{\pi} > 0$, por lo tanto, entre $\frac{2}{3} < x < 2$ se encuentra carga de naturaleza positiva.

c. Entre $2 < x < \infty$, se toma el valor $x = 3$ para determinar cuál es la naturaleza de la carga, en esta franja.

$\sigma = \frac{\lambda}{\pi} \left[\frac{1}{5} - \frac{4}{13} \right] = -\frac{7}{65} \frac{\lambda}{\pi} < 0$, por lo tanto, entre $2 < x < \infty$ se encuentra carga de naturaleza negativa.

Entonces, para hallar la carga positiva, se analiza el tramo $\frac{2}{3} < x < 2$:

$$Q = \int_S \sigma dS = \int_{\frac{2}{3}}^2 \int_0^1 \sigma dx dy = \int_{\frac{2}{3}}^2 \sigma dx$$

$$Q = \frac{\lambda}{\pi} \int_{\frac{2}{3}}^2 \left[\frac{1}{(x-1)^2 + 1} - \frac{4}{x^2 + 4} \right] dx = \frac{\lambda}{\pi} \left[\arctan(x-1) - 2 \arctan \frac{x}{2} \right] \Big|_{\frac{2}{3}}^2$$

$$Q = \frac{\lambda}{\pi} \left[-\arctan(1) + 3 \arctan\left(\frac{1}{3}\right) \right] = 0,05725\lambda$$

□

b. Para obtener la carga negativa, se analizan los tramos $-\infty < x < \frac{2}{3}$ y :

$$2 < x < \infty$$

$$Q = \frac{\lambda}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\frac{2}{3}} \left[\frac{1}{(x-1)^2 + 1} - \frac{4}{x^2 + 4} \right] dx + \int_2^{\infty} \left[\frac{1}{(x-1)^2 + 1} - \frac{4}{x^2 + 4} \right] dx \right\}$$

$$Q = \frac{\lambda}{\pi} \left[\arctan(x-1) - 2 \arctan \frac{x}{2} \right]_{-\infty}^{\frac{2}{3}} + \frac{\lambda}{\pi} \left[\arctan(x-1) - 2 \arctan \frac{x}{2} \right]_2^{\infty}$$

$$Q = \frac{\lambda}{\pi} \left\{ \arctan(x-1) \Big|_{-\infty}^{\frac{2}{3}} + \arctan(x-1) \Big|_2^{\infty} \right\} - \frac{2\lambda}{\pi} \left\{ \arctan \frac{x}{2} \Big|_{-\infty}^{\frac{2}{3}} + \arctan \frac{x}{2} \Big|_2^{\infty} \right\}$$

✓

$$Q = \frac{\lambda}{\pi} \left[-3 \arctan \left(\frac{1}{3} \right) - 2 \arctan(\infty) + \arctan(1) \right]$$

$$Q = -1,05725\lambda \quad \square$$

Por lo tanto, la carga inducida en una franja del plano de un metro de ancho es:

$$Q = 0,05725\lambda - 1,05725\lambda = -\lambda \quad \square$$

c. la carga inducida en una franja del plano de un metro de ancho, se puede obtener también del siguiente modo:

$$Q = \frac{\lambda}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 \left[\frac{1}{(x-1)^2 + 1} - \frac{4}{x^2 + 4} \right] dx dy$$

$$Q = \frac{\lambda}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{(x-1)^2 + 1} - \frac{4}{x^2 + 4} \right] dx$$

$$Q = \frac{\lambda}{\pi} \left\{ \arctan(x-1) \Big|_{-\infty}^{\infty} - 2 \arctan \left(\frac{x}{2} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} \right\}$$

$$Q = \frac{\lambda}{\pi} \{ \arctan(\infty) - \arctan(-\infty) - 2 [\arctan(\infty) - \arctan(-\infty)] \}$$

$$Q = \frac{2\lambda}{\pi} \{ \arctan(\infty) - 2 \arctan(\infty) \}$$

$$Q = -\lambda \quad \square$$

3.14. Problemas.

Problema 1.

Cargas puntuales positivas de 4, 2 y $-2 [C]$ están localizadas en el plano yz en $y=0, z=0$; $y=1, z=1$; $y=-1, z=-1$ respectivamente. Encontrar la fuerza que actúa sobre una carga puntual unitaria negativa localizada en $x=6$, sobre el eje x .

Problema 2.

Considerar dos líneas muy largas de densidad de carga longitudinal λ localizadas en $y = \pm 1, x = 0, -\infty \leq z \leq \infty$, junto con dos líneas muy largas de densidad de carga longitudinal $-\lambda$ similares en $x = \pm 1, y = 0$. Hallar una expresión analítica para las líneas equipotenciales en el plano xy . Dibujar las curvas equipotenciales.

Problema 3.

Encontrar la fuerza por unidad de longitud que se ejerce sobre las líneas de densidad de carga longitudinal positivas debidas a las líneas de densidad de carga longitudinal negativas del problema anterior.

Problema 4.

Un alambre recto y delgado se extiende sobre el eje z , $-1 \leq z \leq 1$. La densidad de carga longitudinal no uniforme está dada por $\lambda = |z|$. En el plano $z = 0$:

- ¿Qué componentes del campo electrostático están presentes y de qué variable son función?
- Obtener el campo eléctrico en un punto cualquiera del plano $z = 0$.

Problema 5.

Una línea de densidad de carga longitudinal λ existe sobre dos cuadrantes $-45^\circ \leq \varphi \leq 45^\circ$; $135^\circ \leq \varphi \leq 225^\circ$, de un círculo de radio $2 [m]$ sobre el plano $z = 0$. Hallar el campo eléctrico en $(0, 0, h)$.

Problema 6.

El potencial producido en un punto sobre el eje z por un anillo de densidad de carga longitudinal λ y radio a es $\frac{\lambda Q}{2\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}}$; a partir de este resultado hallar el potencial en el punto $(0, 0, k)$ para una cáscara cilíndrica delgada de densidad de carga superficial σ y radio a , que se extiende desde $0 \leq z \leq h$, siendo $k > h$.

Problema 7.

Se tiene un segmento de línea de longitud $2a$ cargado con una densidad de carga longitudinal uniforme λ , hallar:

- el potencial electrostático para cualquier punto ubicado en el plano $z = 0$.
- el campo electrostático para cualquier punto ubicado en el plano $z = 0$.

Problema 8.

Existen cargas puntuales de $20 \times 10^{-6} [C]$ en $(9, 0, 0)$ y $40 \times 10^{-6} [C]$ en $(0, 16, 0)$ en el espacio libre. Hallar el potencial en $(0, 0, 12)$ cuando:

- $V = 0$
- $V(0, 0, 0) = 0$
- $V(0, 0, 0) = 10$

Problema 9.

Dos cilindros concéntricos de radios a y b ($b > a$), están uniformemente cargados con densidades superficiales de carga σ_a y σ_b . Determinar:

- el campo electrostático para $r < a$, $a < r < b$, y $r > b$.
- la diferencia de potencial entre los dos cilindros.

Problema 10.

Una esfera metálica de $1 [m]$ de radio tiene una carga de $9 \times 10^{-9} [C]$. Se conecta mediante un alambre conductor a una esfera de $0,3 [m]$ de radio, inicialmente descargada y muy alejada de la otra ¿Cuál será la carga de equilibrio en cada esfera después de hacer la conexión?

Problema 11.

Dos placas paralelas muy grandes separadas una distancia S están a potencial 0 y V_0 , respectivamente.

- Utilizar la ecuación de Poisson para obtener el potencial en la región entre las placas, donde la densidad de carga espacial es $\rho = \rho_0 \frac{x}{a}$. La distancia x se mide partir de la placa a potencial 0.
- ¿Cuánto valen las densidades de carga en las placas?

Problema 12.

Una esfera pequeña y aislada de radio a tiene una carga Q . Rodeando esta esfera y concéntrica con ella está una cáscara conductora descargada. El radio interno de la cáscara es b y el externo c . El espacio no conductor es aire. Hallar el potencial absoluto para cada esfera.

Problema 13.

En coordenadas cilíndricas, hallar el potencial dentro de una distribución de carga uniforme $-\rho_0$ que se extiende desde $r = 0$ a $r = 1$ [m]. La densidad de carga no varía con φ o con z y $V = 0$ en $r = -1$ [m] y $V = 100$ [V] en $r = 0,1$ [m].

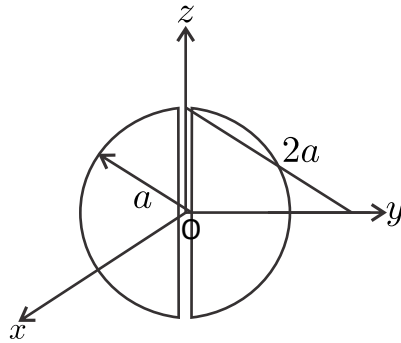


Figura 3.83 Problema 14.

Problema 14.

Una esfera de radio a se perfora haciendo un hueco cilíndrico de radio $r = 10^{-2}a$. El hueco se puede considerar filiforme si se compara con el radio de la esfera.

En la esfera a excepción del hueco cilíndrico, existe una densidad de carga volumétrica. Hallar el campo eléctrico en el punto P , ver Fig. 3.83.

Problema 15.

Una carga Q está distribuida en el volumen de una esfera de radio a con una densidad de carga volumétrica $\rho = A(a - r)$, r es la distancia al centro de la esfera y A una constante. Calcular:

- el valor de la constante A .
- el potencial y el campo eléctrico en puntos interiores y exteriores de la esfera.
- el valor del potencial en el centro y superficie de la esfera.

Problema 16.

Un cilindro muy largo de radio a , tiene una densidad de carga volumétrica $\rho = \rho_0 \sin \frac{\pi r}{a}$ y ρ_0 para $r > a$. Calcular:

- el campo eléctrico para $r < a$
- el campo eléctrico para $r > a$
- una carga negativa se ubica en el eje del cilindro, analice si su equilibrio es estable o no.

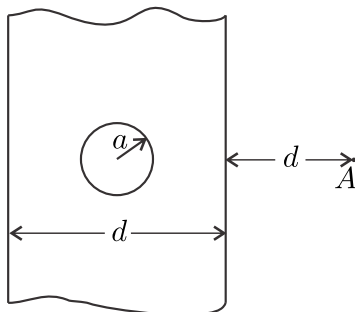


Figura 3.84 Problema 17

Problema 17.

En el centro de una placa de espesor d muy larga en las otras dos direcciones existe un hueco esférico de radio a .

En la placa excepto en el hueco hay una densidad de carga superficial distribuida uniformemente. Hallar el campo eléctrico en el punto A , a una distancia $\frac{d}{2}$ de la

placa, ver Fig. 3.84.

Problema 18.

Sobre una semicircunferencia de radio a se distribuye una densidad longitudinal de carga $\lambda = \lambda_0 \cos \varphi$.

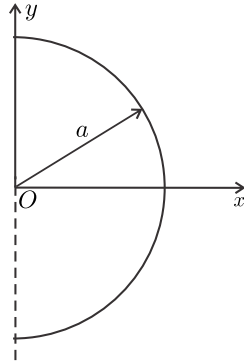


Figura 3.85 Problema 18.

Calcular:

- la carga sobre la semicircunferencia
- el campo eléctrico en el punto O , ver Fig. 3.85.

Problema 19.

Calcular el potencial y el campo eléctrico, en función de r para la distribución de carga volumétrica, ver Fig. 3.85:

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 \sqrt{\frac{r}{a}} & \frac{a}{2} \leq r \leq a \\ 0 & \frac{a}{2} < r < a \end{cases}$$

Problema 20.

El campo eléctrico debido a un segmento rectilíneo de longitud L , centrado con respecto al plano $z = 0$ tiene una densidad de carga longitudinal constante λ , es:

$$\mathbb{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{r^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}} - \frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{r^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}} \right] \vec{a}_r +$$

$$\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}} - \frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}} \right] \vec{a}_z$$

Obtener las líneas equipotenciales e identificarlas.

4

CAPÍTULO CUATRO

Campo electrostático en medios materiales.

4.1. Aislantes y dieléctricos.

4.1.1. Aislante.

Es un material de conductividad baja que permite el paso de una corriente de conducción despreciable, si se compara con la que atraviesa un conductor de dimensiones equivalentes y sometido a la misma diferencia de potencial entre sus extremos. La corriente pequeña que circula a través del aislante se llama corriente de fuga. Ésta, es la que determina qué clase de material se requiere en una aplicación determinada. El aislante ideal aún no se conoce. La corriente de fuga calienta localmente el aislante y facilita el paso de más corriente, ya que la resistencia disminuye, este efecto es acumulativo y si la tensión alcanza cierto valor, el aislante se perfora, con las consiguientes perturbaciones o averías si se trata de un material en servicio. El fallo se manifiesta por una superficie quemada o la volatilización completa del material.

4.1.2. Dieléctrico.

Es un material que no conduce corriente eléctrica, pero en su interior existe un campo eléctrico. En estado estático puede presentar un campo eléctrico. El vacío es el único dieléctrico perfecto ya que la conductividad es nula.

Los materiales aislantes que se utilizan normalmente son dieléctricos imperfectos, ya que si someten a una tensión eléctrica presentan las siguientes características: corriente de desplazamiento, absorción de corriente y paso de corriente de conducción.

4.1.3. Circuito equivalente de un aislante.

C : representa la permitancia o capacitancia.

R_1 : representa la pérdida por absorción de corriente del dieléctrico.

R_2 : representa la componente óhmica de la corriente de fuga.

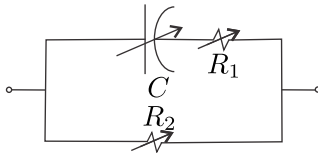


Figura 4.1 Circuito equivalente de un aislante.

En la Fig. 4.1, si $R_1 = 0$ y $R_2 \rightarrow \infty$, se tiene el circuito equivalente del dieléctrico perfecto. C , R_1 y R_2 son variables que dependen de la temperatura, la frecuencia y la tensión a que se somete el dieléctrico.



Figura 4.2 Circuito equivalente de un dieléctrico.

En la práctica R_1 y R_2 , se combinan en una sola, conectada en serie o en paralelo con R_2 , siempre que se elija un valor apropiado.

La finalidad de los aislantes es proporcionar un aislamiento seguro y suficiente entre conductores y las partes metálicas de un aparato o instalación.

Cuando un campo eléctrico atraviesa un dieléctrico donde inicialmente están ligados los electrones hay un desplazamiento infinitesimal de las cargas positivas y negativas en direcciones opuestas. Este desplazamiento es pequeño comparado con las distancias atómicas. Un dieléctrico en el que se ha producido este desplazamiento, se dice que está polarizado y que sus moléculas tienen un momento dipolar

inducido. Estos dipolos crean su propio campo eléctrico que se suma al producido por las cargas externas. El campo de los dipolos y el externo pueden tener magnitudes comparables.

Además de desplazar las cargas positivas y negativas un campo eléctrico aplicado polariza el dieléctrico al orientar las moléculas que poseen un momento dipolar permanente. Aquéllas están sometidas a un par que tiende a alinearlas con el campo, pero las colisiones debidas a la agitación térmica de las moléculas impiden el alineamiento.

En un dieléctrico polarizado cada molécula se comporta como un momento de dipolo. Los dieléctricos no polares están constituidos por moléculas que tienen un dipolo eléctrico permanente nulo, pero si se someten a un campo eléctrico externo se induce en ellas un momento dipolar. Una vez se suprima el campo externo desaparecerá el momento dipolar inducido.

4.2. Polarización eléctrica, $\mathbb{P}$.

Es el momento dipolar por unidad de volumen y es una magnitud macroscópica. Se define así:

$$\mathbb{P} = N\vec{p} = \frac{\vec{dp}}{d\tau} \quad (4.1)$$

N : número de moléculas por unidad de volumen.

$d\tau$: elemento de volumen.

$\vec{p}$: momento dipolar medio por molécula en un elemento de volumen.

El momento dipolar de una distribución de carga es independiente del origen de coordenadas, siempre que la carga neta de la distribución sea nula, como ocurre en las moléculas.

4.2.1. Dieléctricos polares.

Están constituidos por moléculas que tienen un momento dipolar permanente. Si se someten a un campo electrostático externo, el momento dipolar propio se alinea con él y además se induce en el material un momento dipolar.

En la Ec. (4.1), N se puede expresar así:

$$\frac{M}{m} = \frac{N_A}{n} \quad m = \frac{Mn}{N_A} \quad \delta = \frac{m}{\tau} = \frac{Mn}{\tau N_A}$$

$$N = \frac{\delta N_A}{M} \quad (4.2)$$

donde:

N_A : Número de Avogadro.

δ : densidad del material.

M : masa molecular del material.

4.3. Tipos de polarización.

4.3.1. Electrónica.

Se debe al desplazamiento de los electrones con respecto al núcleo. No depende de la temperatura.

4.3.2. Atómica.

Se debe al desplazamiento de los átomos cargados, unos con respecto a otros en la molécula. Depende de la temperatura.

Estos tipos de polarización aparecen y desaparecen rápidamente en períodos de tiempo de $10^{-10}[s]$ y se conocen como polarización instantánea.

Los tipos de polarización siguientes tienen mayor duración y dan lugar a fenómenos de absorción:

4.3.3. Dipolar.

Se presenta al aplicar un campo electrostático a cuerpos cuyas moléculas tienen momentos dipolares permanentes; el campo externo produce en ellos una orientación de los ejes de dichos dipolos y además un momento dipolar inducido. Depende de la temperatura.

4.3.4. Interfacial.

Se debe a la presencia de iones libres en la superficie de separación de los componentes de un cuerpo sólido heterogéneo. No se conoce bien el efecto de la temperatura.

4.4. Campo eléctrico externo e interno a un dieléctrico.

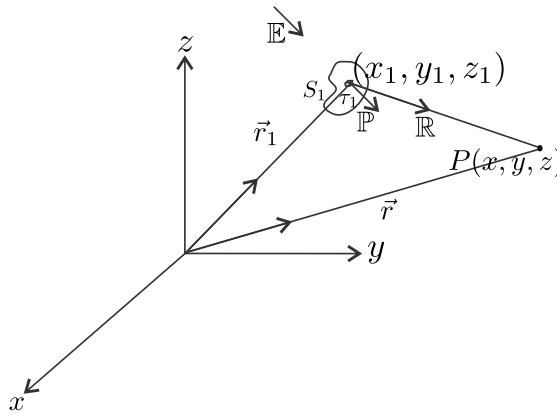


Figura 4.3 Circuito equivalente de un aislante.

La Fig. 4.3 muestra un bloque de material dieléctrico con una polarización que es función de la posición en el dieléctrico. Se calculará el potencial eléctrico que crean los dipolos en un punto exterior al dieléctrico polarizado.

Este potencial sumado al producido por las cargas libres nos dará el potencial total.

El potencial producido por un elemento diferencial dipolar es:

$$dV = \frac{\vec{dp} \cdot \vec{a}_R}{4\pi\epsilon_o R^2} \quad \vec{dp} = \mathbb{P}d\tau \quad (4.3)$$

de donde:

$$dV = \frac{\mathbb{P} \cdot \vec{a}_R}{4\pi\epsilon_o R^2} d\tau$$

pero $\nabla_1 \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\vec{a}_R}{R^2}$, se tiene:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{\tau_1} \mathbb{P} \cdot \nabla_1 \left(\frac{1}{R} \right) d\tau \quad (4.4)$$

$\mathbb{P}$ nunca se conoce de antemano, se puede deducir de otras magnitudes medibles. Empero, de momento se supone conocida.

$$\nabla_1 \cdot V\mathbb{F} = \nabla_1 V \cdot \mathbb{F} + V \nabla_1 \cdot \mathbb{F}$$

De la identidad vectorial anterior, se tiene:

$$\nabla_1 \left(\frac{1}{R} \right) \cdot \mathbb{P} = \nabla_1 \cdot \left(\frac{\mathbb{P}}{R} \right) - \frac{\nabla_1 \cdot \mathbb{P}}{R} \quad (4.5)$$

Si la Ec. (4.5) se remplaza en la Ec. (4.4):

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left[\int_{\tau_1} \nabla_1 \cdot \left(\frac{\mathbb{P}}{R} \right) d\tau + \int_{\tau_1} \frac{-\nabla_1 \cdot \mathbb{P}}{R} d\tau \right]$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left[\oint_{S_1} \left(\frac{\mathbb{P}}{R} \cdot d\mathbb{S} \right) + \int_{\tau_1} \frac{-\nabla_1 \cdot \mathbb{P}}{R} d\tau \right]$$

pero $d\mathbb{S}_1 = dS_1 \vec{a}_N$, entonces:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left[\oint_{S_1} \frac{\mathbb{P} \cdot \vec{a}_N}{R} dS + \int_{\tau_1} \frac{-\nabla_1 \cdot \mathbb{P}}{R} d\tau \right] \quad (4.6)$$

En la Ec. (4.6) se define:

$$\sigma_P \triangleq \mathbb{P} \cdot \vec{a}_N|_S \quad (4.7)$$

$$\rho_P \triangleq -\nabla_1 \cdot \mathbb{P} \quad (4.8)$$

Si se remplazan las Ecs. (4.7) y (4.8) en la Ec. (4.6):

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left[\oint_{S_1} \frac{\sigma_P}{R} dS + \int_{\tau_1} \frac{\rho_P}{R} d\tau \right] \quad (4.9)$$

donde:

ρ_P : densidad volumétrica de carga ligada o densidad volumétrica de carga inducida de polarización o densidad volumétrica de carga latente.

σ_p : densidad superficial de carga ligada o densidad superficial de carga inducida de polarización o densidad superficial de carga latente.

Se usa la expresión carga latente para resaltar el hecho de que las cargas no tienen libertad de moverse o ser extraídas del material dieléctrico. La densidad superficial de carga latente mide la componente normal de la polarización a la superficie del material. La densidad volumétrica de carga ligada mide la no uniformidad de la polarización dentro del material.

Un dieléctrico puede sustituirse por las distribuciones de carga latente dadas por las Ecs. (4.7) y (4.8) sin modificar el campo eléctrico en el exterior del material. La Ec. (4.9) expresa el potencial debido a los dipolos en el dieléctrico. Para obtener el potencial total hay que superponer el potencial creado por las cargas que originan el campo externo, responsable de la polarización. El dieléctrico está compuesto de dipolos elementales $\vec{dp}$, y es necesario que cada uno de ellos sea eléctricamente neutro para que la Ec. (4.4) exprese el potencial correcto. Si $\nabla_1 \cdot \mathbb{P} \neq 0$, los elementos de volumen individuales parecen estar cargados. El origen de esta paradoja se encuentra en la identidad vectorial donde la contribución de cada elemento se transforma en un término de volumen diferente y en un término de superficie, ya que partimos del hecho de que el dieléctrico era eléctricamente neutro, por lo tanto:

$$Q_p = \int_{\tau_1} \rho_p d\tau + \oint_{S_1} \sigma_p dS = 0 \quad (4.10)$$

La Ec. (4.10) se puede verificar fácilmente.

Ya que:

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \nabla \left[\oint_{S_1} \frac{\sigma_p}{R} dS + \int_{\tau_1} \frac{\rho_p}{R} d\tau \right] \\ \mathbb{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left[\oint_{S_1} \frac{\sigma_p \cdot d\vec{S}}{R^2} \vec{a}_R + \int_{\tau_1} \frac{\rho_p d\tau}{R^2} \vec{a}_R \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Las Ecs. (4.9) y (4.11) dan la contribución del material polarizado al potencial y al campo eléctrico en el punto P , independientemente si el punto se encuentra en el interior o exterior del material. La polarización se origina como una respuesta a un campo eléctrico externo que actúa sobre el dieléctrico y, en estas circunstancias, la situación es mucho más complicada, porque es necesario conocer $\mathbb{P}(\mathbb{E})$. $\mathbb{P}$ depende del campo eléctrico total, que incluye la contribución del mismo dieléctrico y ésta es la que se desea evaluar. No se puede determinar $\mathbb{P}$ porque no se conoce $\mathbb{E}$ y viceversa y por lo tanto, es necesario un punto de vista diferente que se analizará más adelante.

4.5. Rigidez eléctrica.

Si un conductor se encuentra en el aire, el campo eléctrico en las vecindades de él es proporcional a la densidad de carga superficial y ésta es mayor en las superficies con radio de curvatura pequeño. Si un campo uniforme sobrepasa cierto valor casi inmediatamente ocurre una chispa en el aire, ésta puede ocurrir antes si el campo no es uniforme. El valor máximo del campo eléctrico que un aislante puede soportar sin que ocurra una descarga eléctrica o chispa se llama rigidez eléctrica o rigidez electrostática.

Para impedir la descarga entre los conductores en alta tensión se emplean los aislantes. La rigidez dieléctrica de éstos será grande si la diferencia de potencial entre los conductores es alta, menor si la distancia entre los conductores es pequeña o si la curvatura de las superficies conductoras límites vecinos es pequeña.

En la práctica se calculan los aislantes de cables y capacitores de modo que en ningún punto del espacio entre los conductores, el campo eléctrico alcance un valor superior al límite de la rigidez electrostática de los materiales utilizados.

4.6. Efecto corona.

Si un conductor se encuentra en el aire y trabaja a un potencial elevado, el campo eléctrico a su alrededor también lo es. El conductor atraerá iones de polaridad opuesta a velocidades tales que producen más iones debido a las colisiones. Este flujo de iones constituye una corriente o descarga por corona con un brillo azul visible y un sonido audible. La carga del conductor tiende a ser neutralizada por los iones atraídos y se reduce la diferencia de potencial entre el conductor y el aire, la cual si se mantiene o aumenta hará que el aire se vuelva conductor y ocurrirá una chispa.

Cuando se presenta el efecto corona, el aire se vuelve parcialmente conductor, se produce una cantidad apreciable de ozono y se producen pérdidas en las líneas de transmisión de energía eléctrica, las cuales pueden ser considerables. El ozono en presencia de humedad origina sustancias ácidas que deterioran los conductores, entonces, al diseñar una línea de transmisión, el radio de los conductores se calcula de acuerdo a la de trabajo para evitar el efecto corona.

4.7. Cálculo de la intensidad de campo local, efectivo o molecular

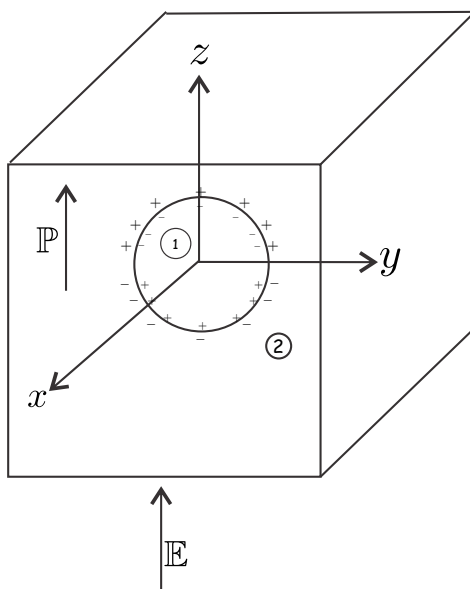


Figura 4.4 Cálculo del campo local.

Se analizó cómo hallar el potencial y el campo eléctrico dado $\mathbb{P}$. Sin conocer ésta se calculará el potencial y el campo eléctrico en el interior y exterior del dieléctrico, si se conoce:

- potenciales de los conductores
- cargas de los conductores
- geometría y características de los conductores y dieléctricos del sistema.

Para lograr este objetivo, se precisa conocer el campo eléctrico medio que actúa sobre una molécula en el dieléctrico, el cual se conoce como campo local.

Si un dieléctrico se halla en un campo externo aquel se convierte en fuente de campo eléctrico debido a su polarización. El campo interno del dieléctrico que actúa sobre sus moléculas es diferente al externo y se denomina campo local. La diferencia entre ellos es esencial para dieléctricos con gran densidad, como es en el caso de los líquidos y sólidos.

Se crea una cavidad esférica pequeña desde el punto de vista físico de radio y centro en O , donde se va a calcular el campo local. La superficie esférica divide el

dieléctrico en dos regiones, ver Fig. 4.4. El campo local en el punto O es:

$$\mathbb{E}_{Loc} = \mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 + \mathbb{E} \quad (4.12)$$

$\mathbb{E}_1$: campo debido al volumen externo a la cavidad.

$\mathbb{E}_2$: campo originado por el volumen de la cavidad.

$\mathbb{E}$: campo externo causante de la polarización del dieléctrico.

Al evaluar $\mathbb{E}_1$ se supone que la distancia de las fuentes del campo al punto O es grande y por lo tanto la región 1 se considera uniformemente polarizada. Para ésta se tiene:

$$\rho_p = -\nabla_1 \cdot \mathbb{P} = 0 \quad \sigma_p = P_o \vec{a}_z \cdot \vec{a}_r = P_o \cos \theta \quad dS = R_o^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

La densidad volumétrica de carga latente es nula ya que el volumen τ_1 se considera uniformemente polarizado. De la Ec. (4.11), se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{P_o R_o^2 \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi}{R_o^2} \vec{a}_r \\ \mathbb{E}_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{P_o R_o^2 \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi}{R_o^2} (\sin \theta \cos \varphi \vec{a}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{a}_y + \cos \theta \vec{a}_z) \\ \mathbb{E}_1 &= \frac{P_o}{4\pi\epsilon_o} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi \vec{a}_z = \frac{P_o \vec{a}_z}{3\epsilon_o} \\ \mathbb{E}_1 &= \frac{\mathbb{P}}{3\epsilon_o} \end{aligned} \quad (4.13)$$

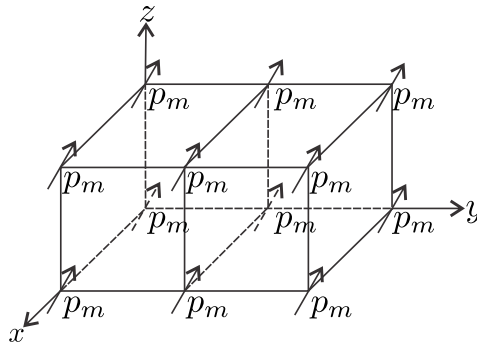


Figura 4.5 Cálculo de $\mathbb{E}_2$.

La Ec. (4.13) es válida para un dieléctrico homogéneo muy grande. Si es finito, la intensidad del campo en él, depende de su forma y dimensiones.

Al evaluar $\mathbb{E}_2$ se tiene en cuenta la distribución de los momentos dipolares de las moléculas en el interior de la cavidad, por lo que no se puede expresar mediante alguna fórmula general. El cálculo se hará para el caso cuando las moléculas en la cavidad se encuentran en las posiciones atómicas regulares (vértices) de un cristal cúbico, y todos los momentos dipolares poseen la misma dirección en el espacio. Esta condición se cumple para los momentos dipolares inducidos. $\mathbb{E}_2$ se calcula en un punto donde esté una de las moléculas, es decir, en un vértice de la red cristalina. Allí se ubica el origen de coordenadas y los ejes x , y , z se dirigen por las aristas de la red. Si de la Ec.(3.86), se obtiene una proyección sobre el eje x , ésta toma la siguiente forma:

$$E_{2x} = \frac{p_x}{4\pi\epsilon_o} \sum_i \frac{-r_i^2 + 3x_i}{r_i^5} + \frac{p_y}{4\pi\epsilon_o} \sum_i \frac{3x_i y_i}{r_i^5} + \frac{p_z}{4\pi\epsilon_o} \sum_i \frac{3x_i z_i}{r_i^5} \quad (4.14)$$

La sumatoria se realiza por todas las moléculas de la cavidad de la Fig. 4.5:

$$\sum_i x_i^2 = \sum_i y_i^2 = \sum_i z_i^2 = \frac{1}{3} \sum_i r_i^2 \quad (4.15)$$

$$\sum_i x_i y_i = \sum_i x_i z_i = \sum_i y_i z_i = 0 \quad (4.16)$$

Si las Ecs. (4.14) y (4.15) se sustituyen en la Ec. (4.13), ésta toma el siguiente valor:

$$E_{2x} = 0 \quad (4.17)$$

De la misma manera se demuestra que $E_{2y} = E_{2z} = 0$, en definitiva:

$$\mathbb{E}_2 = 0 \quad (4.18)$$

Si los resultados obtenidos en las Ecs. (4.12) y (4.17) se sustituyen en la Ec. (4.11). El campo local que actúa sobre la molécula en el interior del dieléctrico es:

$$\mathbb{E}_{Loc} = \mathbb{E} + \frac{\mathbb{P}}{3\epsilon_o} \quad (4.19)$$

Esta ecuación es una aproximación, puesto que el dieléctrico real se diferencia del modelo con el cual se obtuvo la Ec. (4.18). En el caso general es diferente de cero porque:

- a. la red del dieléctrico puede poseer otra simetría.
- b. los momentos de dipolo de las moléculas pueden tener direcciones diferentes.
- c. los campos eléctricos de las moléculas pueden diferenciarse de los originados por los dipolos.

En general:

$$\mathbb{E}_{Loc} = \mathbb{E} + \frac{b \mathbb{P}}{\varepsilon_o} \quad (4.20)$$

donde b es una constante que depende de la naturaleza del dieléctrico. Se han discutido dieléctricos que tienen un solo tipo de moléculas. De forma general:

$$\mathbb{P} = \sum_1^N N_i \vec{p}_i \quad (4.21)$$

donde:

N_i : número de moléculas por unidad de volumen del tipo i .

$\vec{p}_i$: momento dipolar medio de las moléculas de tipo i .

Para muchos dieléctricos el momento de dipolo eléctrico es proporcional al campo local y tiene misma dirección.

$$\vec{p} = \alpha \mathbb{E}_{Loc}$$

α : polarizabilidad molecular.

Estos dieléctricos se llaman lineales e isótropos son homogéneos y se llaman dieléctricos clase A , para éstos:

$$\mathbb{P} = N \vec{p} = N \alpha \mathbb{E}_{Loc} \quad (4.22)$$

$$N \alpha \left(\mathbb{E} + \frac{\mathbb{P}}{3 \varepsilon_o} \right) \rightarrow \mathbb{P} = \frac{N \alpha}{1 - \frac{N \alpha}{3 \varepsilon_o}} \mathbb{E}$$

$$\frac{N \alpha}{1 - \frac{N \alpha}{3 \varepsilon_o}} \triangleq \varepsilon_o \chi_e$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{P} = \varepsilon_o \chi_e \mathbb{E} \quad (4.23)$$

χ_e : susceptibilidad eléctrica del material. Es adimensional.

Para un dieléctrico clase A , la polarización eléctrica es directamente proporcional a la intensidad de campo eléctrico macroscópico y también al campo local.

4.8. Divergencia del campo eléctrico y vector desplazamiento eléctrico.

De la formulación integral de la ley de Gauss, se tiene:

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \mathbb{E} d\tau = \oint_S \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = \frac{Q_T}{\varepsilon_o} \quad (4.24)$$

donde Q_T incluye las cargas ligadas y las libres, por consiguiente:

$$Q_T = \int_{\tau} (\rho_P + \rho_L) d\tau \quad (4.25)$$

Si la Ec. (4.25) se remplaza en la Ec. (4.24), se tiene:

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \mathbb{E} d\tau = \frac{1}{\varepsilon_o} \int_{\tau} (\rho_P + \rho_L) d\tau \quad (4.26)$$

Si:

$$\rho_T = \rho_P + \rho_L \quad (4.27)$$

se tiene:

$$\nabla \cdot \mathbb{E} = \frac{\rho_T}{\varepsilon_o} \quad (4.28)$$

Si en la Ec. (4.28) se remplaza la Ec. (3.13):

$$\nabla \cdot (-\nabla V) = \frac{\rho_T}{\varepsilon_o} \rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho_T}{\varepsilon_o} \quad (4.29)$$

Si la Ec. (4.27) se remplaza la Ec. (4.28), se tiene:

$$\nabla \cdot \mathbb{E} = \frac{\rho_P + \rho_L}{\varepsilon_o} = \frac{-\nabla \cdot \mathbb{P} + \rho_L}{\varepsilon_o} \rightarrow \nabla \cdot (\varepsilon_o \mathbb{E} + \mathbb{P}) = \rho_L$$

Se define:

$$\mathbb{D} \triangleq \varepsilon_o \mathbb{E} + \mathbb{P} \quad (4.30)$$

$\mathbb{D}$: vector desplazamiento eléctrico.

La forma diferencial de la ley de Gauss para dieléctricos es:

$$\nabla \cdot \mathbb{D} = \rho_L \quad (4.31)$$

cuya formulación integral es:

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \mathbb{D} d\tau = \int_{\tau} \rho_L d\tau = Q_L$$

$$\oint_S \mathbb{D} \cdot d\mathbb{S} = Q_L \quad (4.32)$$

Para dieléctricos clase A, si la Ec. (4.23) se reemplaza en la Ec. (4.30):

$$\mathbb{D} = \varepsilon_o \mathbb{E} + \varepsilon_o \chi_e \mathbb{E} = \varepsilon_o (1 + \chi_e) \mathbb{E}$$

de donde se define

$$\varepsilon \triangleq \varepsilon_o (1 + \chi_e) \quad (4.33)$$

También:

$$k = \varepsilon_r \triangleq \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o} = 1 + \chi_e \quad (4.34)$$

$$\mathbb{D} = \varepsilon \mathbb{E} \quad (4.35)$$

ε : permitividad del dieléctrico.

ε_r : permitividad relativa o constante dieléctrica del material.

Para el vacío $k = 1$, $\chi_e = 0$, por lo tanto, el vacío no se deja polarizar.

Si se reemplaza la Ec. (4.35) en la Ec. (4.31):

$$\nabla \cdot \mathbb{E} = \frac{\rho_L}{\varepsilon} \quad (4.36)$$

Si la Ec. (3.13) se reemplaza, en la Ec. (4.35):

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_L}{\varepsilon} \quad (4.37)$$

$$\mathbb{D} = \frac{\varepsilon_o}{\varepsilon} \mathbb{D} + \mathbb{P}$$

Si en la Ec. (4.30) se sustituye la Ec. (4.35):

$$\mathbb{P} = \frac{k-1}{k} \mathbb{D} \quad (4.38)$$

Si a ambos miembros de la Ec. (4.38) se toma el divergente:

$$\nabla \cdot \mathbb{P} = \frac{k-1}{k} \nabla \cdot \mathbb{D}$$

Si las Ecs. (4.7) y (4.31) se reemplazan en la expresión anterior:

$$\rho_P = \frac{1-k}{k} \rho_L \quad (4.39)$$

Si en la Ec. (4.27) se sustituye la Ec. (4.39)

$$\rho_T = \frac{1-k}{k} \rho_L + \rho_L$$

$$\rho_T = \frac{\rho_L}{k} \quad (4.40)$$

La densidad de carga volumétrica total es menor que la densidad de carga volumétrica libre, ya que la densidad de carga volumétrica latente anula parte de la libre.

4.8.1. Ecuación de Clausius - Mossotti.

Ésta expresa la permitividad relativa del material en función de las propiedades físicas del dieléctrico. Se obtiene de la definición de la susceptibilidad eléctrica:

$$N\alpha \left(1 + \frac{\chi_e}{3}\right) = \varepsilon_o \chi_e \quad (4.41)$$

Si la Ec. (4.33) se sustituye en la Ec. (4.41):

$$N\alpha \frac{2 + 1 + \chi_e}{3} = \varepsilon_o (\varepsilon_r - 1)$$

$$\frac{N\alpha}{3\varepsilon_o} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \quad (4.42)$$

Si la Ec. (4.2) se remplaza en la Ec. (4.42), se tiene:

$$\frac{M}{\delta} \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{N_A \alpha}{3\varepsilon_o} \quad (4.43)$$

Si en la Ec. (4.43), se remplaza el siguiente valor de α :

$$\alpha = \frac{3\varepsilon_o}{N} \quad \therefore \quad k = \varepsilon_r \rightarrow \infty \quad (4.44)$$

Físicamente, un valor alto de permitividad relativa corresponde a moléculas infinitamente polarizables; en los gases y líquidos éstas son relativamente pequeñas, por lo que esta condición es inalcanzable. El primer miembro de la Ec. (4.44) no depende de la temperatura ni de la presión. Las presiones para los gases pueden ser grandes, del orden de $100[MPa]$. En los sólidos cristalinos las interacciones entre los dipolos producen polarizaciones que son más complicadas que la del modelo sencillo y por lo tanto la Ec. (4.44) no es válida.

4.9. Condiciones de frontera.

La solución de la ecuación de Poisson o Laplace debe satisfacer ciertas condiciones de contorno:

4.9.1. I. Potencial.

- a. En la frontera, límite, superficie de separación de dos medios diferentes, entrecara o borde el potencial debe ser continuo. Una discontinuidad implicaría un campo eléctrico infinito, lo que físicamente es imposible.

- b. Si la distribución de carga tiene una extensión finita, el potencial cero se elige a una distancia muy alejada, si tiene extensión grande el potencial cero se elige a una distancia arbitraria.
- c. Si en un conductor y en su interior las cargas eléctricas están en reposo, el potencial es constante e igual al de la superficie. Si existe simetría en la distribución, en el centro de ésta el potencial es finito, a menos que allí exista un dipolo.
- d. Si en un campo eléctrico uniforme se introduce un cuerpo, el potencial a una distancia muy alejada de él es diferente de cero.

4.9.2. II. Componente tangencial del campo electrostático y del desplazamiento eléctrico.

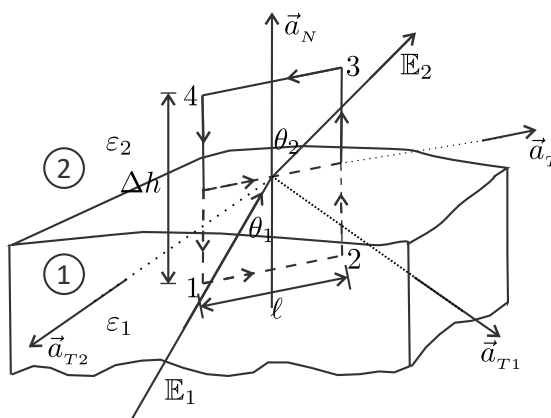


Figura 4.6 Componente tangencial del campo eléctrico.

Para deducir esta condición se utiliza el hecho de que el campo electrostático es conservativo. La Fig. 4.6 es una vista de la sección transversal a la superficie de separación de dos medios diferentes. Se considerará un rectángulo pequeño de longitud ℓ y altura $\Delta h \rightarrow 0$.

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\vec{\ell} = \sum_1^4 \int_C \mathbf{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

$$\int_1^2 \mathbf{E}_1 \cdot d\ell \vec{a}_T + \int_2^3 \mathbf{E} \cdot d\ell \vec{a}_N + \int_4^3 \mathbf{E}_2 \cdot d\ell (-\vec{a}_T) + \int_1^4 \mathbf{E}_1 \cdot d\ell (-\vec{a}_N) = 0$$

$\int_2^3 \mathbb{E} \cdot d\vec{\ell} \vec{a}_N = \int_1^4 \mathbb{E}_1 \cdot d\vec{\ell} (-\vec{a}_N) = 0$, ya que $\Delta h \rightarrow 0$, con el fin de ubicarse en la superficie de separación. Entonces:

$$\int_0^\ell [\mathbb{E}_1 \cdot d\vec{\ell} \vec{a}_T - \mathbb{E}_2 \cdot d\vec{\ell} \vec{a}_T] = 0$$

puesto que $\vec{d\ell}$ es diferente de cero:

$$\mathbb{E}_1 \cdot \vec{a}_T = \mathbb{E}_2 \cdot \vec{a}_T \quad (4.45)$$

$$E_{1T} = E_{2T} \quad (4.46)$$

$$\mathbb{E}_1 \times \vec{a}_N = \mathbb{E}_2 \times \vec{a}_N \quad (4.47)$$

Las Ecs. (4.45), (4.46) y (4.47) expresan que la componente tangencial del campo electrostático es continua a través de la frontera entre dos dieléctricos. Este resultado es independiente de la presencia de carga en la superficie de separación de ambos medios. De la Ec. (4.35):

$$D_{1T} = \varepsilon_1 E_{1T} \quad D_{2T} = \varepsilon_2 E_{2T}$$

si se dividen miembro a miembro las expresiones anteriores:

$$\frac{D_{2T}}{D_{1T}} = \frac{\varepsilon_{2r}}{\varepsilon_{1r}} \quad (4.48)$$

La componente tangencial del desplazamiento eléctrico es discontinua a través de la frontera.

4.9.3. III. Componente normal del campo electrostático y del desplazamiento eléctrico.

Para deducir esta condición se utiliza el hecho de que el flujo neto del vector desplazamiento es equivalente a la carga encerrada por la superficie S que limita al volumen τ .

$$\oint_S \mathbb{D} \cdot d\vec{S} = \sum_1^3 \int_S \mathbb{D} \cdot d\vec{S} = 0$$

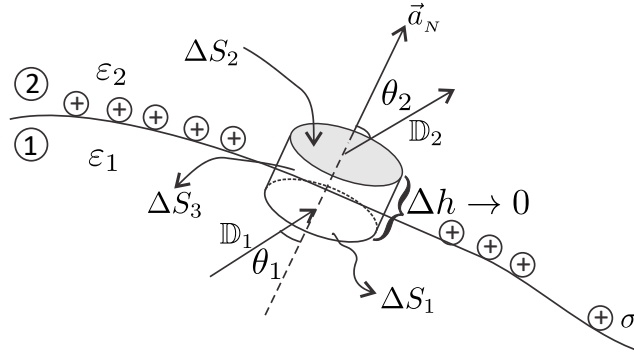


Figura 4.7 Componente normal del vector desplazamiento.

$$\int_{S_2} \mathbb{D}_2 \cdot dS \vec{a}_N + \int_{S_1} \mathbb{D}_1 \cdot dS (-\vec{a}_N) + \int_{S_3} \mathbb{D}_3 \cdot \vec{dS}_3 = Q_L$$

$$\int_{S_3} \mathbb{D}_3 \cdot \vec{dS}_3 = 0$$

ya que $\Delta h \rightarrow 0$, con el fin de ubicarse en la superficie de separación. Entonces:

$$\int_{S_2} [\mathbb{D}_2 \cdot \vec{a}_N - \mathbb{D}_1 \cdot \vec{a}_N] dS = Q_L$$

$$\mathbb{D}_2 \cdot \vec{a}_N - \mathbb{D}_1 \cdot \vec{a}_N = \sigma_L \quad (4.49)$$

$$D_{2N} - D_{1N} = \sigma_L \quad (4.50)$$

donde:

$\vec{a}_N$: vector unitario normal a la superficie de separación de los dos medios y cuyo sentido es de la región 1 hacia la 2.

σ_L : densidad superficial de carga libre en la frontera.

$$\varepsilon_{2r} E_{2N} - \varepsilon_{1r} E_{1N} = \frac{\sigma_L}{\varepsilon_o} \quad (4.51)$$

Las Ecs. (4.48), (4.49) y (4.50) establecen que las componentes normales de los vectores desplazamiento y campo electrostático son discontinuas a través de la frontera, si ésta tiene una densidad superficial de carga libre.

4.9.4. Caso particular: dieléctrico.

Como se estudió, éstos no admiten carga libre, $\sigma_L = 0$. De las Ecs. (4.49), (4.50) y (4.51):

$$\mathbb{D}_2 \cdot \vec{a}_N = \mathbb{D}_1 \cdot \vec{a}_N \quad (4.52)$$

$$D_{2N} = D_{1N} \quad (4.53)$$

$$\varepsilon_{2r} E_{2N} = \varepsilon_{1r} E_{1N} \quad (4.54)$$

si no existe carga libre en la frontera:

- a. la componente normal del desplazamiento es continua a través de la frontera.
- b. la componente normal del campo electrostático es discontinua a través de la frontera.

4.9.5. Ley de Snell.

En el caso de dieléctricos, de las Figs. 4.6 y 4.7 se tiene:

$$E_{1T} = E_1 \sin \theta_1 \quad E_{2T} = E_2 \sin \theta_2 \quad (4.55)$$

$$D_{1N} = D_1 \cos \theta_1 \quad D_{2N} = D_2 \cos \theta_2 \quad (4.56)$$

donde:

θ_i : ángulo que hace el campo con la normal en el medio i .

Del conjunto de Ecs. (4.55):

$$E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2 \quad (4.57)$$

Del conjunto de Ecs. (4.56) y de la Ec. (4.35):

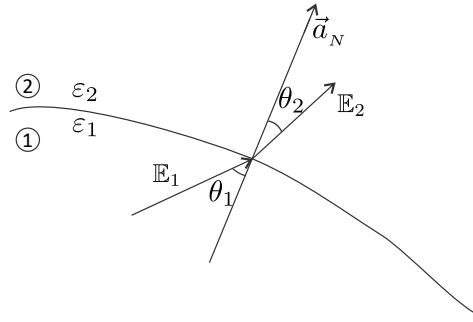


Figura 4.8 Ley de Snell.

$$\varepsilon_{1r} E_1 \cos \theta_1 = \varepsilon_{2r} E_2 \cos \theta_2 \quad (4.58)$$

De las Ecs. (4.57) y (4.58), se tiene:

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\varepsilon_{1r}}{\varepsilon_{2r}} \quad (4.59)$$

La Ec. (4.59) recibe el nombre de ley de Snell o de refracción de las líneas de campo. En la Fig. 4.8 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, porque las líneas de campo en el medio 1 se alejan más de la normal que en el medio 2.

4.10. Dieléctricos polares.

Se estudiará el comportamiento de dieléctricos cuyas moléculas poseen un momento dipolar permanente. Éste, en la mayoría de las moléculas tiene el orden de $10^{-29} \dots 10^{30} [\frac{C}{m}]$. Los momentos dipolares de la mayoría de las moléculas están medidos y se hallan en tablas.

4.10.1. Ecuación de Langevin.

En mecánica estadística se demuestra que si un gran número de moléculas se encuentran en equilibrio termodinámico, el número dN de moléculas que poseen una energía W es proporcional a $e^{-\frac{W}{kT}}$, donde:

dN : moléculas que poseen energía W .

T : temperatura absoluta en ° K.

$d\Omega$: diferencial de ángulo sólido

k : constante de Boltzmann

$$k = 1,381 \times 10^{-13} \left[\frac{J}{^\circ K} \right]$$

Entonces:

$$dN = A_1 e^{-\frac{W}{kT}} d\Omega = A_1 e^{-\frac{W}{kT}} \frac{r^2 \sin\theta d\theta d\varphi}{r^2}$$

$$dN = 2\pi A_1 e^{\frac{pE_{loc}\cos\theta}{kT}} \sin\theta d\theta$$

$$\text{Si } A = 2\pi A_1 \quad u = \frac{pE_{loc}\cos\theta}{kT}$$

$$dN = A e^{u\cos\theta} \sin\theta d\theta$$

En este caso la distribución de Boltzmann caracteriza la orientación de los ejes de los momentos dipolares de las moléculas respecto al eje polar.

$$N = A \int_0^\pi e^{u\cos\theta} \sin\theta d\theta$$

El valor medio de la componente del momento de los dipolos respecto a la dirección del campo local es:

$$P_{Av} = \frac{\int p \cos\theta dN}{\int dN} = \frac{Ap \int_0^\pi e^{u\cos\theta} \sin\theta \cos\theta d\theta}{A \int_0^\pi e^{u\cos\theta} \sin\theta d\theta}$$

$$P_{Av} = p\mathcal{L}(u) \quad (4.60)$$

donde

$$\mathcal{L}(u) = \coth u - \frac{1}{u} \quad (4.61)$$

La Ec. (4.61) se conoce como la función de Langevin. La región de interés práctico es cuando $u \ll 1$:

$$\coth u = \frac{1}{u} + \frac{u}{3} + \frac{u^3}{45} + \dots$$

Si se limita la expresión para $\mathcal{L}(u)$ con el término lineal respecto a u :

$$\mathcal{L}(u) \approx \frac{u}{3} \quad (4.62)$$

Si la Ec. (4.62) se sustituye en la Ec. (4.60):

$$P_{Av} \approx \frac{pu}{3}$$

$$P_{Av} \approx \frac{p^2 E_{Loc}}{3kT} \quad (4.63)$$

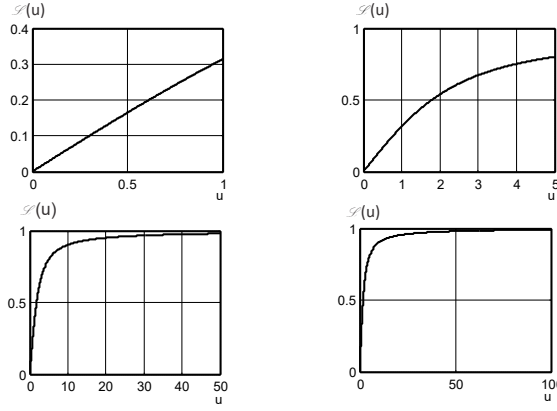


Figura 4.9 Función de Langevin para diversos valores de u .

Al aumentar el campo, los momentos dipolares se orientan de modo más rápido en la dirección de $\mathbb{E}_{Loc}$. Para $u \gg 1$, se puede considerar que los momentos dipolares son paralelos entre sí y tienen la misma dirección de $\mathbb{E}_{Loc}$. Por lo tanto:

$$P_{Av} = P \quad (4.64)$$

Si en la Ec. (4.60) u toma un valor altísimo, entonces, la función de Langevin tiende al valor uno y se obtiene la Ec. (4.64). Si ésta se cumple se alcanza la polarización máxima posible y un posterior incremento de campo local no conduce a su crecimiento. Este valor de campo local para el cual se logra la polarización máxima posible, se llama campo local de saturación. En la mayoría de los casos importantes se utiliza la Ec. (4.64) y la polarización es:

$$\mathbb{P} \approx \frac{Np^2}{3kT} \mathbb{E}_{Loc} \quad (4.65)$$

4.10.2. Ecuación de Debye.

Se consideran dieléctricos reales en los que existen dipolos permanentes e inducidos. Si se superponen las Ecs. (4.22) y (4.65), se tiene:

$$\mathbb{P} = N \left(\alpha + \frac{p^2}{3kT} \right) \mathbb{E}_{Loc}$$

$$\mathbb{P} = N \left(\alpha + \frac{p^2}{3kT} \right) \left(\mathbb{E} + \frac{\mathbb{P}}{3\epsilon_o} \right) \quad (4.66)$$

Si $\mathbb{P} = (\epsilon_r - 1) \epsilon_o \mathbb{E}$ se sustituye en la Ec. (4.66):

$$(\epsilon_r - 1) \epsilon_o \mathbb{E} = N \left(\alpha + \frac{p^2}{3kT} \right) \frac{\epsilon_r + 2}{3} \mathbb{E}$$

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{N}{3\epsilon_o} \left(\alpha + \frac{p^2}{3kT} \right) \quad (4.67)$$

Si la Ec. (4.2) se remplaza en la Ec.(4.67):

$$\frac{M}{\delta} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{N_A}{3\epsilon_o} \left(\alpha + \frac{p^2}{3kT} \right) \quad (4.68)$$

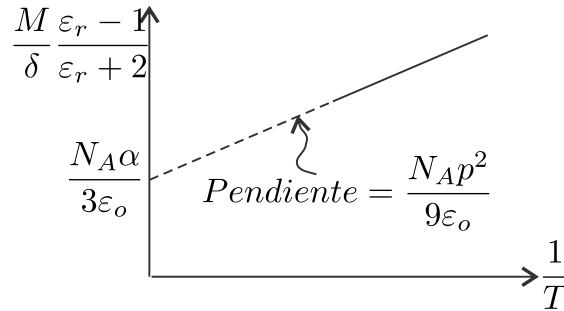


Figura 4.10 Ecuación de Debye.

La Ec. (4.68) recibe el nombre de ecuación de Debye y se puede graficar como se muestra en la Fig. 4.10 La polarizabilidad molecular y el momento dipolar de una molécula se pueden hallar a partir del intercepto con el eje vertical y la pendiente de la ecuación de Debye, respectivamente.

En el laboratorio se halla que la contribución de los momentos dipolares inducidos en la polarización es cien veces inferior a la de los permanentes y en la mayoría de los casos despreciable.

El mecanismo de polarización de los gases y líquidos polares densos necesita otros modelos, ya que la polarización no puede interpretarse como la reorientación de los momentos dipolares en el campo local.

4.11. Energía.

Se consideran Q_i cargas muy alejadas de un volumen limitado por una superficie, se calculará la energía necesaria para traerlas y ensamblarlas una a una. La situación se muestra en la Fig. 4.11.

La energía que se necesita para traer la carga Q_1 desde el punto muy alejado al volumen de interés es nula, ya que no existen cargas que produzcan campo que se oponga.

$$W_1 = 0 \quad (4.69)$$

La energía necesaria para traer la carga Q_2 a una distancia R_{12} de Q_1 es:

$$W_2 = V_{21}Q_2 \quad (4.70)$$

donde V_{21} es el potencial que crea la carga Q_1 en el punto donde se va a ubicar Q_2 .

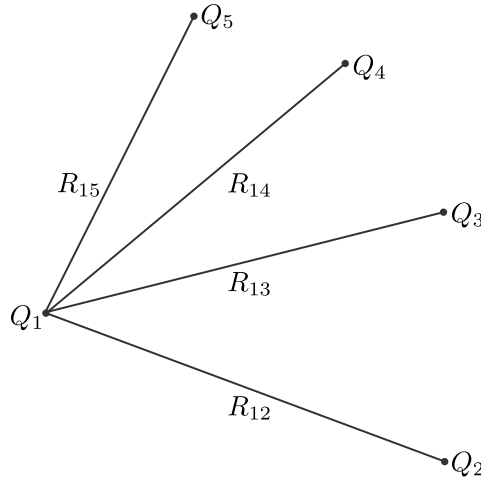


Figura 4.11 Conjunto de cargas puntuales $Q_1, Q_2, \dots, Q_5$ en un volumen.

La energía necesaria para traer la carga Q_3 a una distancia R_{13} de Q_1 y a R_{23} de Q_2 es:

$$W_3 = (V_{31} + V_{32}) Q_3 \quad (4.71)$$

donde V_{31} y V_{32} son los potenciales que crean las cargas Q_1 y Q_2 en el punto donde se va a ubicar Q_3 .

La energía necesaria para traer la carga Q_4 a una distancia R_{14} de Q_1 , a R_{24} de Q_2 y R_{34} de Q_3 es:

$$W_4 = (V_{41} + V_{42} + V_{43}) Q_4 \quad (4.72)$$

donde V_{41}, V_{42} y V_{43} son los potenciales que crean las cargas Q_1, Q_2 y Q_3 en el punto donde se va a ubicar Q_4 .

La energía necesaria para traer la carga Q_5 a una distancia R_{15} de Q_1 , a R_{25} de Q_2 , a R_{35} de Q_3 y R_{45} de Q_4 es:

$$W_5 = (V_{51} + V_{52} + V_{53} + V_{54}) Q_5 \quad (4.73)$$

donde V_{51}, V_{52}, V_{53} y V_{54} son los potenciales que crean las cargas Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4 en el punto donde se va a ubicar Q_5 .

La energía que se requiere para ensamblar las N cargas es $W = \sum_1^N W_i$. Por lo tanto:

$$W = 0 + V_{21}Q_2 + (V_{31} + V_{32}) Q_3 + (V_{41} + V_{42} + V_{43}) Q_4 + (V_{51} + V_{52} + V_{53} + V_{54}) Q_5 \quad (4.74)$$

Si a la Ec. (4.74) se le aplica el Teorema de la Reciprocidad, se puede reescribir:

$$W = 0 + V_{12}Q_1 + V_{13}Q_1 + V_{23}Q_2 + V_{14}Q_1 + V_{24}Q_2 + V_{34}Q_3 + V_{15}Q_1 + V_{25}Q_2 + V_{35}Q_3 + V_{45}Q_4 + \cdots + V_{1N}Q_1 + V_{2N}Q_2 + V_{3N}Q_3 + \cdots + V_{(N-1)N}Q_{(N-1)} \quad (4.75)$$

Si se suman las Ecs. (4.74) y (4.75):

$$2W = (V_{12} + V_{13} + V_{14} + V_{15} + \cdots + V_{1N}) Q_1 + (V_{21} + V_{23} + V_{24} + V_{25} + \cdots + V_{2N}) Q_2 +$$

$$(V_{31} + V_{32} + V_{34} + V_{35} + \cdots + V_{3N}) Q_3 + (V_{41} + V_{42} + V_{43} + V_{45} + \cdots + V_{4N}) Q_4 + \\ \left[V_{N1} + V_{N2} + V_{N3} + V_{N4} + \cdots + V_{N(N-1)} \right] Q_N$$

Se define:

$$V_i \triangleq V_{i1} + V_{i2} + \cdots + V_{i(i-1)} + V_{i(i+1)} + \cdots + V$$

V_i : potencial total en el punto i , donde se ubica la carga Q_i , debido a las cargas restantes. Entonces:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N V_i Q_i \quad (4.76)$$

La Ec. (4.76) expresa la energía total almacenada al ensamblar N cargas. No tiene en cuenta la energía propia de la carga, corresponde a la energía que se liberaría si se permitiera a cada una de ellas aumentar hasta un volumen infinito. Se emplea para analizar la interacción de cargas puntuales, ya que no contiene sus energías propias infinitas. Se puede generalizar para el caso de una distribución de carga volumétrica, superficial o longitudinal, al realizar las siguientes transformaciones:

$$dQ_i \rightleftharpoons \rho d\tau \rightleftharpoons \sigma dS \rightleftharpoons \lambda dl$$

Si $N \rightarrow \infty$, la suma es la definición de la integral:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_1^N \rightarrow \int$$

Entonces:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\tau} V \rho d\tau \quad (4.77)$$

$$W = \frac{1}{2} \int_S V \sigma dS \quad (4.78)$$

$$W = \frac{1}{2} \int_C V \lambda dl \quad (4.79)$$

V : potencial en el punto del elemento diferencial.

La Ec. (4.77) toma en cuenta tanto la energía de interacción entre las cargas, como las energías propias de éstas, es mayor que cero y no se anula para una carga única.

Si la Ec. (3.50) se reemplaza en la Ec. (4.76):

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} Q_j Q_i \quad (4.80)$$

Si la Ec. (3.62) se reemplaza en la Ec. (4.76):

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N V_i S_{ij} V_j \quad (4.81)$$

Es útil expresar la Ec. (4.77) en una que involucre sólo al campo electrostático, si la Ec. (4.31) se sustituye en la Ec. (4.77), ésta se transforma en:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\tau} V \nabla \cdot \mathbb{D} d\tau$$

Se utiliza la siguiente identidad vectorial para lograr el objetivo $\nabla \cdot W\mathbb{F} = \nabla W \cdot \mathbb{F} + W\nabla \cdot \mathbb{F}$:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\tau} (\nabla \cdot V\mathbb{D} - \nabla V \cdot \mathbb{D}) d\tau$$

$$W = \frac{1}{2} \int_{\tau} (\nabla \cdot V\mathbb{D} + \mathbb{E} \cdot \mathbb{D}) d\tau = \frac{1}{2} \int_{\tau} \nabla \cdot V\mathbb{D} d\tau + \frac{1}{2} \int_{\tau} \mathbb{E} \cdot \mathbb{D} d\tau$$

Con el Teorema de Gauss la expresión anterior se transforma en:

$$W = \frac{1}{2} \oint_S V\mathbb{D} \cdot d\mathbb{S} + \frac{1}{2} \int_{\tau} \mathbb{E} \cdot \mathbb{D} d\tau$$

Donde S es la superficie que limita al volumen τ que encierra todas las cargas del sistema. La superficie S se escoge muy alejada de la distribución; τ no es necesario que sea muy grande, debe incluir todas las regiones donde el campo electrostático existe. Si se utiliza simetría esférica, se tiene:

$$V \propto \frac{1}{r} \quad D \propto \frac{1}{r^2} \quad ds \propto r^2$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V\mathbb{D} \cdot dS \vec{a}_N \propto \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \frac{1}{r^2} r^2 \rightarrow 0$$

Por lo tanto:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\tau} \mathbb{E} \cdot \mathbb{D} d\tau \quad (4.82)$$

4.11.1. Densidad de energía del campo.

Las energías calculadas por las Ecs. (4.77) y (4.82) son equivalentes, pero el contenido físico es diferente: si las cargas se encuentran en capas superficiales finas de los conductores, la Ec. (4.77) se reduce a la suma de las integrales sobre las superficies conductoras, mientras que el espacio entre las cargas es nula; la Ec. (4.82) se reduce a la integral respecto al espacio entre los conductores donde existe un campo. En la Ec. (4.77) la energía se localiza en las cargas, en la Ec. (4.82) el campo eléctrico se considera portador de la energía y está localizada en todo el espacio donde existe el campo eléctrico. La densidad de energía eléctrica es:

$$\omega = \frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2} \mathbb{D} \cdot \mathbb{E} \left[\frac{J}{m^3} \right] \quad (4.83)$$

4.11.2. Conversión mutua de la energía del campo eléctrico y de la energía mecánica.

En un sistema de cuerpos cargados en movimiento la energía del campo eléctrico varía, transformándose en otras formas de energía, por ejemplo, en mecánica.

Se desprecian las pérdidas térmicas y la radiación, lo cual es válido teóricamente en el caso de movimiento bastante lento. De acuerdo a la conservación de la energía, el trabajo de las fuentes externas es:

$$dW_{ext} = \sum V_i dQ_i \quad (4.84)$$

El trabajo de las fuentes externas es equivalente a la suma de variación de la energía eléctrica del sistema dW_E más el trabajo mecánico $dW_{Méc}$ más las pérdidas de energía inevitables $dW_{Pérd}$.

$$\sum V_i dQ_i = dW_E + dW_{Méc} + dW_{Pérd} \quad (4.85)$$

En el caso ideal $dW_{Pérd} = 0$, entonces:

$$\sum V_i dQ_i = dW_E + dW_{Méc} \quad (4.86)$$

Las componentes separadas de esta igualdad pueden tener signos diferentes en función de la conversión de energía eléctrica en mecánica (motores) o mecánica en

eléctrica (generadores). El estado de un sistema mecánico se puede describir con la ayuda de las coordenadas generalizadas, cuyo número es equivalente al grado de libertad. En correspondencia con éstas se introducen las fuerzas generalizadas, cuyo número es equivalente al grado de libertad. En correspondencia con éstas se introducen las fuerzas generalizadas que coinciden con la dirección y sentido de las coordenadas y el producto de ellas en el trabajo mecánico.

$$dW_{Méc} = \mathbb{F}_i \cdot \vec{d\alpha}_i \quad (4.87)$$

Si se supone que el sistema de cuerpos varía sólo con una de las coordenadas generalizadas:

$$\vec{d\alpha}_i = dx \vec{a}_x \quad \mathbb{F}_i = F_x \vec{a}_x \quad dW_{Méc} = F_x dx \quad (4.88)$$

$$\vec{d\alpha}_i = d\varphi \vec{a}_\varphi \quad \mathbb{F}_i = F_\varphi \vec{a}_\varphi \quad dW_{Méc} = T_\varphi d\varphi \quad (4.89)$$

Si la Ec. (4.88) se reemplaza en la Ec. (4.86), se obtiene:

$$\sum V_i dQ_i = dW_E + F_x dx \quad (4.90)$$

En la Ec. (4.90) se presentan dos casos de interés:

4.11.3. I. El sistema de cuerpos cargados está desconectado de las fuentes.

En este caso las cargas de los cuerpos no varían, $dQ_i = 0$. De la Ec. (4.90), se tiene:

$$dW_E = -F_x dx \quad (4.91)$$

La Ec. (4.91) expresa que el trabajo mecánico en el sistema se realiza en base a la disminución de la energía eléctrica almacenada en el sistema, debido a que ésta cubre un porcentaje de pérdidas de energía inevitables. De la Ec. (4.91):

$$F_x = - \left. \frac{\partial W_E}{\partial x} \right|_{Q=k} \quad (4.92)$$

En la Ec. (4.92), se tomó la derivada parcial, ya que en el caso examinado la variación de la energía se debe sólo al cambio de la coordenada generalizada.

Si se sustituye la Ec. (4.89) en la Ec. (4.91), se tiene:

$$T_{\varphi} = - \left. \frac{\partial W_E}{\partial \varphi} \right|_{Q=k} \quad (4.93)$$

4.11.4. II. El sistema de cuerpos cargados está conectado a fuentes de potenciales constantes.

De la Ec. (4.76), se obtiene:

$$dW_E = \frac{1}{2} \sum (V_i dQ_i + Q_i dV_i)$$

$$\text{Pero } V_i = C \rightarrow dV_i = 0$$

Por lo tanto:

$$2dW_E = \sum V_i dQ_i \quad (4.94)$$

Si la Ec. (4.94) se reemplaza en la Ec. (4.86) y se simplifica, se obtiene:

$$dW_{Méc} = dW_E \quad (4.95)$$

La Ec. (4.95) expresa que el trabajo mecánico en el sistema se realiza en base a un incremento de la energía eléctrica almacenada en el sistema. La energía del sistema incrementa en el mismo valor del trabajo mecánico.

En un sistema real sólo se puede almacenar un valor finito de energía, en este caso, el sistema no sirve para convertir energía del campo electrostático en mecánica indefinidamente.

De las Ecs. (4.92) y (4.95), se tiene:

$$F_x = + \left. \frac{\partial W_E}{\partial x} \right|_{V=k} \quad (4.96)$$

En la Ec. (4.96) se tomó la derivada parcial, ya que en el caso examinado la variación de la energía se debe sólo al cambio de la coordenada generalizada.

Si se sustituye la Ec. (4.89) en la Ec. (4.95), se tiene:

$$T_{\varphi} = + \left. \frac{\partial W_E}{\partial \varphi} \right|_{V=k} \quad (4.97)$$

Las Ecs. (4.92) y (4.96) son diferentes, pero conducen a resultados equivalentes, ya que la fuerza en un instante dado depende de los valores de las cargas y de los potenciales y no del carácter variacional posterior. Las fuerzas en el campo electrostático actúan tanto en los conductores como en los dieléctricos. Si la permitividad se diferencia de la del medio circundante se explica el surgimiento de cargas de naturaleza y magnitud diferentes en ambas caras de la frontera, en este caso la fuerza se determina por la suma algébrica de estas cargas. Las fuerzas en un campo electrostático aparecen en la superficie de separación dieléctrico conductor y dieléctrico-dieléctrico.

Las Ecs. Ec. (4.93) y Ec. (4.97) son diferentes y conducen a resultados equivalentes por la misma razón anterior.

4.12. Ejemplos.

Ejemplo 1.

Un hilo conductor que tiene una densidad de carga longitudinal λ , está colocado en el centro de un cilindro aislante que tiene una polarización $\mathbb{P} = \frac{\lambda(k-1)}{2\pi kr} \vec{a}_r$. El radio del hilo es a y el del cilindro b . Hallar:

- La densidad superficial de carga ligada sobre las superficies externa e interna del dieléctrico.
- La densidad de carga volumétrica latente en el dieléctrico.
- Demostrar explícitamente que la carga total de polarización es cero.

SOLUCIÓN

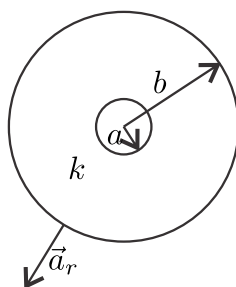


Figura 4.12 Hilo conductor en el centro de un cilindro aislante.

$$a. \quad \sigma_{P_a} = \mathbb{P} \cdot \vec{a}_r|_{r=a} = \frac{\lambda(k-1)}{2\pi ak} \vec{a}_r \cdot (-\vec{a}_r) = \frac{\lambda(1-k)}{2\pi ak} \quad \square$$

$$\sigma_{P_b} = \mathbb{P} \cdot \vec{a}_r|_{r=b} = \frac{\lambda(k-1)}{2\pi bk} \vec{a}_r \cdot (\vec{a}_r) = \frac{\lambda(k-1)}{2\pi bk} \quad \square$$

$$b. \quad \rho_P = -\nabla \cdot \mathbb{P} = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r P_r) = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{\lambda(k-1)}{2\pi kr} \right] = 0$$

$$c. \quad Q_{P_a} = \int_{S_a} \sigma_{P_a} dS = \frac{\lambda(1-k)}{2\pi ak} \int_{S_a} dS = \frac{\lambda(1-k)}{2\pi ak} 2\pi a \ell$$

$$Q_{P_a} = \frac{\lambda(1-k)\ell}{k}$$

$$Q_{P_b} = \int_{S_b} \sigma_{P_b} dS = \frac{\lambda(k-1)}{2\pi bk} \int_{S_b} dS = \frac{\lambda(k-1)}{2\pi bk} 2\pi b \ell$$

$$Q_{P_b} = \frac{\lambda(k-1)\ell}{k}$$

La carga total a lo largo del hilo conductor es:

$$\lambda_T = \lambda + \frac{Q_{P_a}}{\ell} = \lambda + \frac{\lambda(1-k)}{k} = \frac{\lambda}{k}$$

□

$$d. \quad Q_P = \int_{\tau} \rho_P d\tau + \oint_S \sigma_P dS$$

$$\int_{\tau} \rho_P d\tau = 0 \quad \oint_S \sigma_P dS = Q_{P_a} + Q_{P_b}$$

$$\oint_S \sigma_P dS = \frac{\lambda(1-k)\ell}{k} + \frac{\lambda(k-1)\ell}{k} = 0$$

Así: $Q_P = 0$

□

Ejemplo 2.

Una cáscara esférica de radio interior a y exterior b se polariza uniformemente en la dirección del eje z . La polarización en la cáscara es $\mathbb{P} = P_o \vec{a}_z$. Hallar el potencial y campo eléctrico para puntos del eje z , situados fuera de la cáscara.

SOLUCIÓN

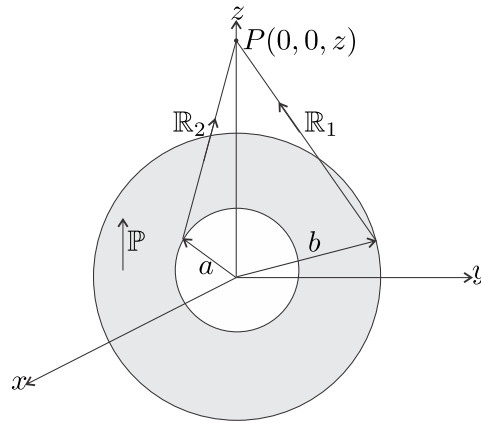


Figura 4.13 Cáscara esférica polarizada uniformemente.

El volumen está limitado por las esferas de radios a y b . Sobre estas superficies existirán densidades superficiales de carga latente y debido a que la polarización es constante no habrá densidad de carga volumétrica ligada.

$$\sigma_{P_a} = P_o \vec{a}_z \cdot (-\vec{a}_r)|_{r=a} = -P_o \cos\theta$$

$$\sigma_{P_b} = P_o \vec{a}_z \cdot \vec{a}_r|_{r=b} = P_o \cos \theta$$

$$\rho_P = -\nabla \cdot P = 0$$

$$R_1 = (a^2 + z^2 - 2az \cos \theta)^{\frac{1}{2}} \quad R_2 = (b^2 + z^2 - 2bz \cos \theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[\frac{-a^2 P_o \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi}{(a^2 + z^2 - 2az \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} + \frac{b^2 P_o \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi}{(b^2 + z^2 - 2bz \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

$$V = \frac{P_o}{2\epsilon_o} \int_0^\pi \left[\frac{-a^2 \cos \theta \sin \theta d\theta}{(a^2 + z^2 - 2az \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} + \frac{b^2 \cos \theta \sin \theta d\theta}{(b^2 + z^2 - 2bz \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

$$a. \quad u^2 = a^2 + z^2 - 2az \cos \theta \quad u du = az \sin \theta d\theta \quad \sin \theta d\theta = \frac{u du}{az}$$

$$\cos \theta = \frac{a^2 + z^2 - u^2}{2az}$$

$$\theta = 0 \quad u^2 = a^2 + z^2 - 2az = (a - z)^2 = (z - a)^2 \quad u = z - a \text{ ya que } z > a$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\cos \theta \sin \theta d\theta}{(a^2 + z^2 - 2az \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} &= \int_{z-a}^{z+a} \frac{a^2 + z^2 - u^2}{2az} \frac{u du}{az} \frac{1}{u} \\ &= \frac{1}{2a^2 z^2} \left[\int_{z-a}^{z+a} (a^2 + z^2) du - \int_{z-a}^{z+a} u^2 du \right] = \frac{1}{2a^2 z^2} \left[(a^2 + z^2) u|_{z-a}^{z+a} - \frac{1}{3} u^3|_{z-a}^{z+a} \right] \\ \int_0^\pi \frac{\cos \theta \sin \theta d\theta}{(a^2 + z^2 - 2az \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} &= \frac{2a}{3z^2} \end{aligned}$$

De manera similar:

$$\int_0^\pi \frac{\cos \theta \sin \theta d\theta}{(b^2 + z^2 - 2bz \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2b}{3z^2}$$

Por lo tanto:

$$V = \frac{P_o}{2\epsilon_o} \left[-a^2 \frac{2a}{3z^2} + b^2 \frac{2b}{3z^2} \right] = \frac{P_o}{3\epsilon_o z^2} (b^3 - a^3) \quad \square$$

El campo eléctrico se obtiene a partir del gradiente negativo del potencial eléctrico, por lo tanto:

$$\mathbb{E} = \frac{2P_o}{3\epsilon_o z^3} (b^3 - a^3) \vec{a}_z \quad \square$$

Ejemplo 3.

Un material dieléctrico contiene $2 \times 10^{20} \left[\frac{\text{mol}}{\text{m}^3} \right]$. Suponga que cada molécula puede representarse como un dipolo consistente en una carga eléctrica positiva y otra ne-

gativa separadas $10^{-8} [m]$, alineadas uniformemente y paralelas al campo eléctrico aplicado de $10^4 \left[\frac{V}{m} \right]$. Hallar la constante dieléctrica del material.

SOLUCIÓN

De las Ecs. (4.1), (4.23) y (4.34) se tiene:

$$P = Np = NQd = Ned = \varepsilon_0 \chi_e E$$

$$k = \frac{Ned}{\varepsilon_0 E} + 1 = \frac{2 \times 10^{20} \times 1,6 \times 10^{-19} \times 10^{-8}}{8,85 \times 10^{-19} \times 4 \times 10^4} + 1$$

$$k = 4,62$$

□

Ejemplo 4.

Una esfera dieléctrica de radio a y constante dieléctrica k está polarizada de forma que $\mathbb{P} = \frac{P_o}{r} \vec{a}_r$, siendo P_o una constante. Calcular:

- las densidades volumétrica y superficial de carga de polarización.
- la densidad volumétrica de carga libre.
- el potencial eléctrico en el interior y exterior de la esfera.

SOLUCIÓN

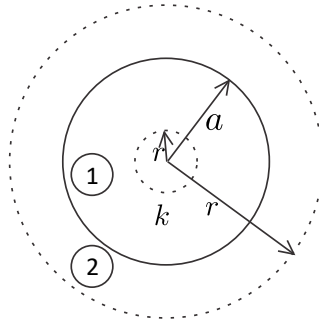


Figura 4.14 Ejemplo 4.

$$a. \quad \sigma_P = \mathbb{P} \cdot \vec{a}_N|_{r=a} = \frac{P_o}{a} \vec{a}_r \cdot \vec{a}_r = \frac{P_o}{a}$$

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbb{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{P_o}{r} \right) = -\frac{P_o}{r^2}$$

$$\rho_P = -\frac{P_o}{r^2} \quad (4.98)$$

b. De la Ec. (4.39), se tiene:

$$\rho_L = \frac{k}{1-k} \left(-\frac{P_o}{r^2} \right) = \frac{kP_o}{(k-1)r^2}$$

c. Si $r > a$:

$$Q_L = \int_{\tau} \rho_L d\tau = \frac{kP_o}{k-1} \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi}{r^2} = \frac{4\pi akP_o}{k-1}$$

$$Q_L = \oint_S \mathbb{D}_2 \cdot d\mathbb{S}$$

$$\mathbb{D}_2 = D_2 \vec{a}_r \quad d\mathbb{S} = dS \vec{a}_r$$

$$\text{Pero: } \oint_S \mathbb{D}_2 \cdot d\mathbb{S} = D_2 \oint_S dS = D_2 4\pi r^2 = \varepsilon_o E_2 4\pi r^2 = Q_L$$

$$E_2 = \frac{akP_o}{(k-1)\varepsilon_o r^2} \quad \mathbb{E}_2 = \frac{akP_o}{(k-1)\varepsilon_o r^2} \vec{a}_r$$

por lo tanto:

$$dV_2 = -\mathbb{E}_2 \cdot \vec{d\ell} = -\frac{akP_o}{(k-1)\varepsilon_o r^2} \vec{a}_r \cdot dr \vec{a}_r$$

$$\int_{V_2}^0 dV_2 = -\frac{akP_o}{(k-1)\varepsilon_o} \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2} \rightarrow V_2 = \frac{akP_o}{(k-1)\varepsilon_o} \left[-\frac{1}{r} \right]_r^{\infty}$$

$$V_2 = \frac{akP_o}{\varepsilon_o (k-1)r}$$

□

Si $r < a$:

$$Q_L = \int_{\tau} \rho_L d\tau = \frac{kP_o}{k-1} \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi}{r^2} = \frac{4\pi kP_o}{k-1} r$$

$$\oint_S \mathbb{D}_1 \cdot d\mathbb{S} = D_1 \oint_S dS = D_1 4\pi r^2 = k\varepsilon_o E_1 4\pi r^2 = Q_L$$

por lo tanto:

$$\frac{4\pi kP_o}{k-1} r = k\varepsilon_o E_1 4\pi r^2 \rightarrow \mathbb{E}_1 = \frac{P_o}{\varepsilon_o (k-1)r} \vec{a}_r$$

$$dV_1 = -\mathbb{E}_1 \cdot \vec{d\ell} = -\frac{P_o}{(k-1)\varepsilon_o r} \vec{a}_r \cdot dr \vec{a}_r$$

$$\int_{V_a}^{V_1} dV_1 = -\frac{P_o}{(k-1)\varepsilon_o} \int_a^r \frac{dr}{r} \rightarrow V_1 = V_a - \frac{P_o}{(k-1)\varepsilon_o} \ln \frac{r}{a}$$

V_a se obtiene de V_2 , cuando se evalúa para $r = a$:

$$V_2|_{r=a} = \frac{kP_o}{\varepsilon_o(k-1)}$$

$$V_1 = \frac{P_o}{\varepsilon_o(k-1)} \left[k + \ln \frac{a}{r} \right]$$

□

Ejemplo 5.

Un cable coaxial consistente de un conductor interno de cobre de radio $0,5 [cm]$, un dieléctrico sólido de constante dieléctrica $4,8$ hasta un radio R_o . y una capa de aceite de permitividad relativa $2,4$ desde R_o hasta un radio de $2,0 [cm]$. La rigidez dieléctrica del sólido es de $40 \times 10^3 \left[\frac{KV}{m} \right]$ y la del aceite $30 \times 10^3 \left[\frac{KV}{m} \right]$. Encontrar:

- el valor de R_o .
- La diferencia de potencial que resulta máxima para ambos medios.

SOLUCIÓN

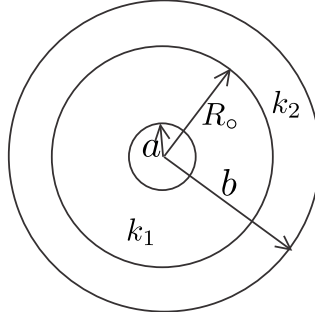


Figura 4.15 Ejemplo 5.

$$a. \quad 5 \times 10^{-3} < r < R_o [m]$$

$$\oint_S \mathbb{D}_1 \cdot d\mathbb{S} = Q_L$$

Pero:

$$D_1 \oint_S dS = D_1 2\pi r \ell = k_1 \varepsilon_o E_1 2\pi r \ell = Q_L$$

$$E_1 = \frac{Q_L}{2\pi \varepsilon_o \ell k_1 r} = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_o k_1 r} \quad (4.99)$$

$$\mathbb{E}_1 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 k_1 r} \vec{a}_r \quad (4.100)$$

En el material sólido, la falla se presentará en aquellos sitios donde la magnitud del campo eléctrico sea máxima. Ya que éste varía inversamente con la distancia, entonces la falla ocurrirá en $a = 5 \times 10^{-3} [m]$ para que ésta se produzca el campo máximo que debe soportar uno de estos puntos será $E_{1D} = 4 \times 10^7 \left[\frac{V}{m} \right]$. De la Ec. (4.99):

$$aE_{1D} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 k_1} \quad (4.101)$$

Si la Ec. (4.101) se remplaza en la Ec. (4.100):

$$\mathbb{E}_1 = \frac{aE_{1D}}{r} \vec{a}_r \quad (4.102)$$

b. $R_o < r < 2 \times 10^{-2} [m]$

En el aceite la chispa se producirá, en caso de falla en R_o para un campo máximo $E_{2D} = 3 \times 10^7 \left[\frac{V}{m} \right]$

$$\oint_S \mathbb{D}_2 \cdot d\mathbb{S} = Q_L$$

Pero:

$$D_2 \oint_S dS = D_2 2\pi r \ell = k_2 \epsilon_0 \ell E_1 2\pi r = Q_L$$

$$\mathbb{E}_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 k_2 r} \vec{a}_r = \frac{ak_1 E_{1D}}{k_2 r} \vec{a}_r \quad (4.103)$$

Para el caso de falla la Ec. (4.103) se evalúa en $r = R_o$, entonces:

$$R_o = \frac{k_1 E_{1D}}{k_2 E_{2D}} a = \frac{4,8 \ 4 \times 10^7}{2,4 \ 3 \times 10^7} 5 \times 10^{-3}$$

$$R_o = 1,33 \times 10^{-2} [m] \quad \square$$

$$V_1 = - \left[\int_b^{R_o} \mathbb{E}_2 \cdot \vec{dr} + \int_{R_o}^a \mathbb{E}_1 \cdot \vec{dr} \right]$$

$$V_1 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{k_1} \int_a^{R_o} \frac{dr}{r} + \frac{1}{k_2} \int_{R_o}^b \frac{dr}{r} \right]$$

$$V_1 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 k_1} \left[\ln \frac{R_o}{a} + \frac{k_1}{k_2} \ln \frac{b}{R_o} \right]$$

Pero: $\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 k_1} = aE_{1D} \quad \frac{k_1}{k_2} = 2$

$$V = aE_{1D} \ln \frac{b^2}{aR_o}$$

donde: $a = 5 \times 10^{-3} [m] \quad b = 2 \times 10^{-2} [m] \quad R_o = \frac{4}{3} \times 10^{-2} [m]$

$$V = aE_{1D} \ln \frac{b^2}{aR_o} = 5 \times 10^{-3} \times 4 \times 10^7 \ln \frac{(2 \times 10^{-2})^2}{5 \times 10^{-3} \times \frac{4}{3} \times 10^{-2}}$$

$$V = 358,35 [KV]$$

□

Ejemplo 6.

Ocho gotas esféricas de agua de $1 [mm]$ de radio cargadas con $10^{-10} [C]$ cada una, se funden en una sola. Hallar el potencial de ésta.

SOLUCIÓN

M_o , R_o , Q_o , τ_o y δ_o son la masa, radio, carga, volumen y densidad o peso específico de cada una de las ocho gotas y M , R , Q , τ y δ son la masa, radio, carga, volumen y densidad o peso específico de la gota resultante. N es el número de gotas. De acuerdo al principio de conservación de la materia cuando las gotas se funden en una sola:

$$M = NM_o \quad \frac{\delta_o N 4\pi R_o^3}{3} = \frac{\delta N 4\pi R^3}{3}$$

pero $\delta_o = \delta$

$$R = R_o \sqrt[3]{N}$$

De acuerdo al principio de conservación de la carga cuando las gotas se funden en una sola:

$$Q = NQ_o$$

Por lo tanto, el potencial de esta gota es:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o R} = \frac{NQ_o}{4\pi\epsilon_o R_o \sqrt[3]{N}}$$

Para

$$N = 8 \quad Q = 10^{-10} [C] \quad R_o = 1 \times 10^{-3} [m]$$

se tiene:

$$V = 3600 [V] = 3,6 [KV]$$

□

Ejemplo 7.

Dos bloques semi-infinitos de dieléctrico se colocan casi en contacto de modo que hay una abertura angosta de separación constante entre ellos. La polarización es constante en todo el material dieléctrico y forma un ángulo con la normal a los planos que limitan la abertura. Determinar el campo eléctrico en la abertura.

SOLUCIÓN

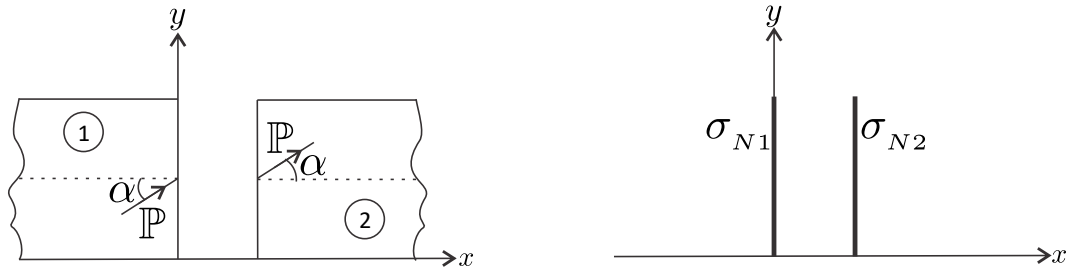


Figura 4.16 Ejemplo 7.

$$\sigma_{P1} = \mathbb{P} \cdot \vec{a}_x = P_o \cos \alpha \quad \sigma_{P2} = \mathbb{P} \cdot (-\vec{a}_x) = -P_o \cos \alpha$$

En la Fig. () el campo eléctrico en un punto de la abertura es:

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 = \frac{\sigma_{P1}}{2\epsilon_o} \vec{a}_x + \frac{\sigma_{P2}}{2\epsilon_o} (-\vec{a}_x)$$

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 = \frac{P_o \cos \alpha}{2\epsilon_o} \vec{a}_x + \frac{-P_o \cos \alpha}{2\epsilon_o} (-\vec{a}_x)$$

$$\mathbb{E} = \frac{P_o \cos \alpha}{\epsilon_o} \vec{a}_x$$

□

Ejemplo 8.

Una cara de separación dieléctrico vacío tiene la ecuación $3x + 2y + z = 12 [m]$. El lado que da al origen de la entrecara tiene una constante dieléctrica $k = 3$ y un campo eléctrico $\mathbb{E}_1 = 2\vec{a}_x + 5\vec{a}_z \left[\frac{V}{m} \right]$. Hallar $\mathbb{E}_2$.

SOLUCIÓN

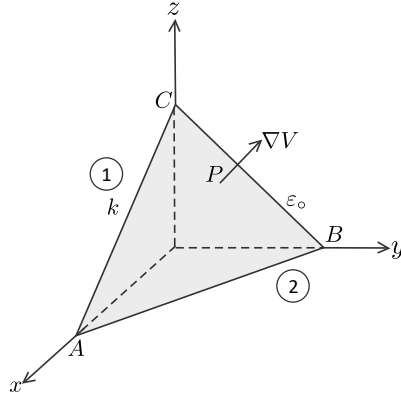


Figura 4.17 Ejemplo 8.

$$3x + 2y + z = 12 \quad W = 3x + 2y + z - 12 = 0$$

$$\nabla W = 3\vec{a}_x + 2\vec{a}_y + \vec{a}_z \quad \nabla W = \sqrt{14}$$

$$\vec{a}_N = \frac{\nabla W}{\nabla W} = \frac{3\vec{a}_x + 2\vec{a}_y + \vec{a}_z}{\sqrt{14}}$$

$$\mathbb{E}_1 \cdot \vec{a}_N = (2\vec{a}_x + 5\vec{a}_z) \cdot \frac{\nabla W}{\nabla W} = \frac{3\vec{a}_x + 2\vec{a}_y + \vec{a}_z}{\sqrt{14}} = \frac{11}{\sqrt{14}}$$

$$\mathbb{E}_{1N} = \frac{11}{\sqrt{14}} \vec{a}_N = \frac{11}{14} (3\vec{a}_x + 2\vec{a}_y + \vec{a}_z)$$

$$\mathbb{E}_{1T} = \mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_{1N} = 2\vec{a}_x + 5\vec{a}_z - \frac{11}{14} (3\vec{a}_x + 2\vec{a}_y + \vec{a}_z)$$

$$\mathbb{E}_{1T} = \frac{-5\vec{a}_x - 22\vec{a}_y + 59\vec{a}_z}{14}$$

De acuerdo a las condiciones de frontera:

$$\mathbb{E}_{1T} = \mathbb{E}_{2T} = \frac{-5\vec{a}_x - 22\vec{a}_y + 59\vec{a}_z}{14}$$

Ya que en la entrecara no existe densidad superficial de carga libre, entonces:

$$\mathbb{D}_{1N} = \mathbb{D}_{2N} \quad \varepsilon_1 \mathbb{E}_{1N} = \varepsilon_2 \mathbb{E}_{2N} \quad \mathbb{E}_{2N} = \frac{k_1}{k_2} \mathbb{E}_{1N}$$

$$\mathbb{E}_{2N} = \frac{33}{14} (3\vec{a}_x + 2\vec{a}_y + \vec{a}_z)$$

$$\text{pero: } \mathbb{E}_2 = \mathbb{E}_{2T} + \mathbb{E}_{2N}$$

$$\mathbb{E}_2 = \frac{1}{7} (47\vec{a}_x + 22\vec{a}_y + 46\vec{a}_z)$$

□

Ejemplo 9.

Una loza de material dieléctrico de $k_2 = 2$, se encuentra entre $x = 0$ y $x = d$ (región 2). La región 1 $x < 0$ y la región 3, $x > d$ son espacio libre. Si el campo eléctrico en la región 2 es $\mathbb{E}_2 = 3\vec{a}_x + 6\vec{a}_y + 4\vec{a}_z \left[\frac{V}{m} \right]$, hallar:

- el ángulo θ_2
- $\mathbb{E}_1$ y $\mathbb{E}_3$
- los ángulos θ_1 y θ_3

SOLUCIÓN

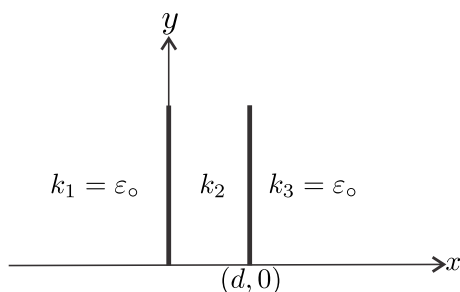


Figura 4.18 Ejemplo 9.

$$a. \mathbb{E}_2 \cdot \vec{a}_N = \frac{(3\vec{a}_x + 6\vec{a}_y + 4\vec{a}_z)}{\sqrt{61}} \cdot \vec{a}_x = \frac{3}{\sqrt{61}}$$

$$\theta_2 = \arccos \frac{3}{\sqrt{61}} = 67,41^\circ$$

□

$$b. \mathbb{D}_{2N} = (\mathbb{D}_2 \cdot \vec{a}_N) \cdot \vec{a}_N = (k_2 \varepsilon_0 \mathbb{E}_2 \cdot \vec{a}_N) \cdot \vec{a}_N$$

$$\mathbb{D}_{2N} = [2\varepsilon_0 (3\vec{a}_x + 6\vec{a}_y + 4\vec{a}_z) \cdot \vec{a}_x] \cdot \vec{a}_x = 6\varepsilon_0 \vec{a}_x$$

$$\mathbb{D}_{2N} = k_2 \varepsilon_0 \mathbb{E}_{2N} = 6\varepsilon_0 \vec{a}_x \rightarrow \mathbb{E}_{2N} = \frac{6}{2} \vec{a}_x = 3\vec{a}_x$$

$$\mathbb{D}_{1N} = \mathbb{D}_{2N} = \varepsilon_0 \mathbb{E}_{1N} = 6\varepsilon_0 \vec{a}_x \quad \mathbb{D}_{1N} = 6\vec{a}_x$$

$$\mathbb{E}_{2T} = \mathbb{E}_2 - \mathbb{E}_{2N} = 3\vec{a}_x + 6\vec{a}_y + 4\vec{a}_z - 3\vec{a}_x = 6\vec{a}_y + 4\vec{a}_z$$

Entonces:

$$\mathbb{D}_{3N} = \mathbb{D}_{2N} = \varepsilon_0 \mathbb{E}_{3N} = 6\varepsilon_0 \vec{a}_x \quad \mathbb{E}_{3N} = 6\vec{a}_x$$

$$\mathbb{E}_{3T} = \mathbb{E}_{2T} = 6\vec{a}_y + 4\vec{a}_z$$

$$\mathbb{E}_1 \cdot \vec{a}_N = \frac{6\vec{a}_x + 6\vec{a}_y + 4\vec{a}_z}{\sqrt{61}} \cdot \vec{a}_x = \frac{6}{\sqrt{61}}$$

$$\theta_1 = \arccos \frac{6}{\sqrt{61}} = 39,80^\circ \quad \square$$

$$\mathbb{E}_3 \cdot \vec{a}_N = \frac{6\vec{a}_x + 6\vec{a}_y + 4\vec{a}_z}{\sqrt{61}} \cdot \vec{a}_x = \frac{6}{\sqrt{61}}$$

$$\theta_3 = \arccos \frac{6}{\sqrt{61}} = 39,80^\circ \quad \square$$

Ejemplo 10.

Una esfera conductora de radio a esta sumergida a la mitad en un medio dieléctrico de permitividad ε . La carga libre total sobre la esfera es Q . Hallar el campo eléctrico en puntos fuera de la esfera y la densidad superficial de carga sobre la esfera.

SOLUCIÓN

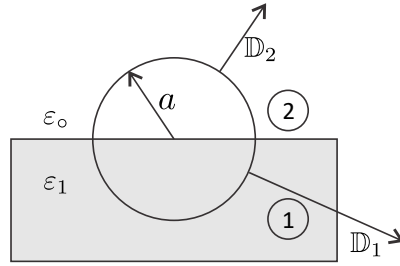


Figura 4.19 Ejemplo 10.

$$\oint_S \mathbb{D} \cdot d\mathbb{S} = \int_{S_1} \mathbb{D}_1 \cdot d\mathbb{S} + \int_{S_2} \mathbb{D}_2 \cdot d\mathbb{S}$$

$$\int_{S_1} D_1 \vec{a}_r \cdot dS \vec{a}_r + \int_{S_2} D_2 \vec{a}_r \cdot dS \vec{a}_r = D_1 \int_{S_1} dS + D_2 \int_{S_2} dS$$

$$D_1 \int_{S_1} dS + D_2 \int_{S_2} dS = (D_1 + D_2) 2\pi r^2 = Q$$

$$\text{En } r = a: \quad \begin{cases} \sigma_1 = D_1 \vec{a}_r \cdot \vec{a}_r = D_1 = \varepsilon_1 E_1 \\ \sigma_2 = D_2 \vec{a}_r \cdot \vec{a}_r = D_2 = \varepsilon_2 E_2 \end{cases}$$

$$\text{En } r = a \text{ y } \theta = \frac{\pi}{2}: \quad \mathbb{E}_1 = \mathbb{E}_2 \rightarrow E_1 = E_2$$

$$(\varepsilon_1 E_1 + \varepsilon_0 E_1) 2\pi r^2 = Q$$

$$E_1 = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon + \varepsilon_o)r^2} \quad \mathbb{E}_1 = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon + \varepsilon_o)r^2} \vec{a}_r$$

$$\mathbb{D}_1 = \frac{\varepsilon Q}{2\pi(\varepsilon + \varepsilon_o)r^2} \vec{a}_r \quad \mathbb{D}_2 = \frac{\varepsilon_o Q}{2\pi(\varepsilon + \varepsilon_o)r^2} \vec{a}_r$$

Por lo tanto, las densidades superficiales de carga son:

$$\sigma_1 = \frac{\varepsilon Q}{2\pi(\varepsilon + \varepsilon_o)a^2} \quad \sigma_2 = \frac{\varepsilon_o Q}{2\pi(\varepsilon + \varepsilon_o)a^2} \quad \square$$

Ejemplo 11.

Un cilindro muy largo, de radio a , permitividad ε_1 se coloca en un medio de permitividad ε_2 . Un campo eléctrico $\mathbb{E} = E_o \vec{a}_x$ se aplica a una distancia muy alejada. Hallar:

- el potencial eléctrico en puntos interiores y exteriores al cilindro.
- el campo eléctrico en puntos interiores y exteriores al cilindro.
- la densidad de carga superficial en la entrecara.

SOLUCIÓN

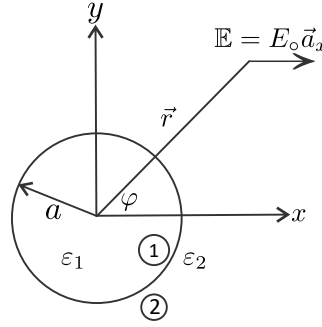


Figura 4.20 Ejemplo 11.

$$V_1 = \left(A_1 r + \frac{B_1}{r} \right) (C_1 \cos \varphi + D_1 \sin \varphi) \quad r \leq a \quad (4.104)$$

$$V_2 = \left(A_2 r + \frac{B_2}{r} \right) (C_1 \cos \varphi + D_1 \sin \varphi) \quad r \geq a \quad (4.105)$$

- $r \rightarrow 0$ V_1 debe ser finito

$$V_1 = \left(A_1 0 + \frac{B_1}{0} \right) (C_1 \cos \varphi + D_1 \operatorname{sen} \varphi)$$

Para que se satisfaga la condición de frontera:

$$B_1 = 0 \quad (4.106)$$

Si la Ec. (4.106) se remplaza en la Ec. (4.104):

$$V_1 = A_1 r (C_1 \cos \varphi + D_1 \operatorname{sen} \varphi) \quad (4.107)$$

Se redefine $A = A_1 C_1$ y $B = A_1 D_1$

Por lo tanto para la Ec. (4.107) se tiene:

$$V_1 = (A \cos \varphi + B \operatorname{sen} \varphi) r \quad (4.108)$$

$$\text{b. } r \rightarrow \infty \quad \mathbb{E}_2 = E_o \vec{a}_x = -\frac{dV_2}{dx} \vec{a}_x$$

$$dV_2 = -E_o dx \quad V_2 = -E_o x + k$$

Si se remplaza el valor correspondiente de x en coordenadas cilíndricas, se tiene:

$$V_2 = -E_o r \cos \varphi + k \quad (4.109)$$

$$\text{También: } \lim_{r \rightarrow \infty} V_2 = \left(A_2 \infty + \frac{B_2}{\infty} \right) (C_2 \cos \varphi + D_2 \operatorname{sen} \varphi)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V_2 = A_2 (C_2 \cos \varphi + D_2 \operatorname{sen} \varphi) r \quad (4.110)$$

Se redefine:

$$C = A_2 C_2 \quad \text{y} \quad F = A_2 D_2$$

por lo tanto para la Ec. (4.110) se tiene:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V_2 = (C \cos \varphi + F \operatorname{sen} \varphi) r \quad (4.111)$$

Al igualar las Ecs. (4.109) y (4.111), se tiene:

$$(C \cos \varphi + F \operatorname{sen} \varphi) r = -E_o r \cos \varphi + k \quad (4.112)$$

De la Ec.(4.112) se concluye:

$$k = 0 \quad C = -E_o \quad F = 0$$

Por lo tanto:

$$A_2 \neq 0 \quad D_2 = 0$$

La Ec. (4.105) se rescribe como:

$$V_2 = \left(A_2 r + \frac{B_2}{r} \right) C_2 \cos \varphi \quad (4.113)$$

De donde $C = A_2 C_2 = -E_o$ y se redefine $G = B_2 C_2$, por lo tanto:

$$V_2 = \left(-E_o r + \frac{G}{r} \right) \cos \varphi = \left(-E_o + \frac{G}{r^2} \right) r \cos \varphi \quad (4.114)$$

$$c. \quad r = a \quad V_1 = V_2$$

De las Ecs. (4.108) y (4.114):

$$(A \cos \varphi + B \sin \varphi) a = \left(-E_o + \frac{G}{a^2} \right) a \cos \varphi \quad (4.115)$$

De donde se concluye:

$$B = 0 \quad (4.116)$$

$$A = -E_o + \frac{G}{a^2} \text{ para } \forall \cos \varphi \neq 0$$

$$a^2 A = -a^2 E_o + G \quad (4.117)$$

La Ec. (4.107) adopta la siguiente forma:

$$V_1 = A r \cos \varphi \quad (4.118)$$

El campo eléctrico en el interior del cilindro se obtiene del gradiente negativo del potencial eléctrico:

$$\frac{\partial V_1}{\partial r} = A \cos \varphi \quad \frac{1}{r} \frac{\partial V_1}{\partial \varphi} = -A \sin \varphi$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{E}_1 = -A (\cos \varphi \vec{a}_r - \operatorname{sen} \varphi \vec{a}_\varphi) = -A \vec{a}_x \quad (4.119)$$

$$\mathbb{D}_1 = -\varepsilon_1 A (\cos \varphi \vec{a}_r - \operatorname{sen} \varphi \vec{a}_\varphi) = -\varepsilon_1 A \vec{a}_x \quad (4.120)$$

Entonces, el campo eléctrico en el exterior del cilindro se obtiene del gradiente negativo del potencial eléctrico:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_2}{\partial r} &= - \left(E_o + \frac{G}{r^2} \right) \cos \varphi & \frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial \varphi} &= - \left(-E_o + \frac{G}{r^2} \right) \operatorname{sen} \varphi \\ \mathbb{E}_2 &= \left(E_o + \frac{G}{r^2} \right) \cos \varphi \vec{a}_r + \left(-E_o + \frac{G}{r^2} \right) \operatorname{sen} \varphi \vec{a}_\varphi \end{aligned} \quad (4.121)$$

$$\mathbb{D}_2 = \varepsilon_2 \left(E_o + \frac{G}{r^2} \right) \cos \varphi \vec{a}_r + \varepsilon_2 \left(-E_o + \frac{G}{r^2} \right) \operatorname{sen} \varphi \vec{a}_\varphi \quad (4.122)$$

d. $r = a \quad D_{1r} = D_{2r}$

Si $\forall \cos \varphi \neq 0$

$$\varepsilon_2 \left(E_o + \frac{G}{a^2} \right) \cos \varphi - (-\varepsilon_1 A \cos \varphi) = 0 \quad (4.123)$$

$$\varepsilon_1 a^2 A + \varepsilon_2 a^2 E_o + \varepsilon_2 G = 0 \quad (4.124)$$

La solución de las Ecs. (4.117) y (4.124) es:

$$A = -\frac{2\varepsilon_2 E_o}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \quad G = \frac{a^2 E_o (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

Por lo tanto:

$$V_1 = -\frac{2\varepsilon_2 E_o}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cos \varphi \quad \mathbb{E}_1 = \frac{2\varepsilon_2 E_o}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} (\cos \varphi \vec{a}_r - \operatorname{sen} \varphi \vec{a}_\varphi) = \frac{2\varepsilon_2 E_o}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \vec{a}_x \quad \square$$

$$\mathbb{D}_1 = \frac{2\varepsilon_1 \varepsilon_2 E_o}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} (\cos \varphi \vec{a}_r - \operatorname{sen} \varphi \vec{a}_\varphi) = \frac{2\varepsilon_1 \varepsilon_2 E_o}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \vec{a}_x \quad \square$$

$$V_2 = \left[-1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right] E_o r \cos \varphi \quad \square$$

$$\mathbb{E}_2 = \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right] E_o \cos \varphi \vec{a}_r + \left[-1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right] E_o \sin \varphi \vec{a}_\varphi$$

$$\mathbb{D}_2 = \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right] \varepsilon_2 E_o \cos \varphi \vec{a}_r + \left[-1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right] \varepsilon_2 E_o \sin \varphi \vec{a}_\varphi$$

e. En $r = a$ la densidad de carga superficial no puede cambiar instantáneamente, por lo tanto $\sigma = 0$.

Sin embargo, se puede encontrar la densidad de carga superficial en $r = a$ y $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$:

$$\sigma = D_{1r} = D_{2r} = \frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_o \cos \varphi$$

La carga superficial en $r = a$ y $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$:

$$dQ = \sigma dS \quad dS = a d\varphi dz$$

$$dQ = \frac{2a\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_o \cos \varphi d\varphi dz$$

$$Q = \frac{2a\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_o \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \int_0^\ell dz$$

$$Q = \frac{4a\varepsilon_1\varepsilon_2\ell}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_o \quad \square$$

Ejemplo 12.

Una esfera conductora de radio a , permitividad ε_1 está colocada dentro de un medio de permitividad ε_2 . Un campo eléctrico $\mathbb{E} = E_o \vec{a}_z$. se aplica a una distancia muy alejada del sistema. Hallar:

- el potencial eléctrico en puntos interiores y exteriores a la esfera.
- el campo eléctrico en puntos interiores y exteriores a la esfera.
- la densidad de carga superficial en la entrecara.

SOLUCIÓN

$$V_1 = \left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2} \right) \cos \theta \quad 0 \leq r \leq a \quad (4.125)$$

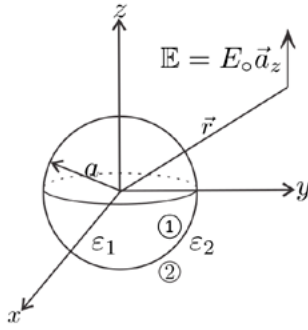


Figura 4.21 Ejemplo 12.

$$V_2 = \left(A_2 r + \frac{B_2}{r^2} \right) \cos \theta \quad \geq a \quad (4.126)$$

a. $r \rightarrow 0$ V_1 debe ser finito.

$$V_1 = \left(A_1 0 + \frac{B_1}{0} \right) \cos \theta$$

Para que se satisfaga la condición de frontera

$$B_1 = 0 \quad (4.127)$$

Si el valor de la Ec. (4.127) se remplaza en la Ec. (4.125):

$$V_1 = A_1 r \cos \theta \quad (4.128)$$

b. $r \rightarrow \infty$ $\mathbb{E}_2 = E_o \vec{a}_z = -\frac{dV_2}{dz} \vec{a}_z$

$$dV_2 = -E_o dz \quad V_2 = -E_o z + k \quad (4.129)$$

También:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V_2 = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(A_2 r + \frac{B_2}{r^2} \right) \cos \theta = A_2 r \cos \theta \quad (4.130)$$

Al igualar las Ecs. (4.129) y (4.130), se tiene:

$$-E_o r \cos \theta + k = A_2 r \cos \theta \quad (4.131)$$

De la Ec. (4.131) se concluye que:

$$k = 0 \quad A_2 = -E_o, \forall \cos \theta \neq 0$$

entonces:

$$V_2 = \left(-E_o r + \frac{B_2}{r^2} \right) \cos \theta = \left(-E_o + \frac{B_2}{r^3} \right) r \cos \theta \quad (4.132)$$

$$c. \quad r = a \quad V_1 = V_2$$

$$V_1 = A_1 a \cos \theta \quad V_2 = \left(-E_o + \frac{B_2}{a^3} \right) a \cos \theta$$

$$A_1 a \cos \theta = \left(-E_o + \frac{B_2}{a^3} \right) a \cos \theta \rightarrow A_1 = -E_o + \frac{B_2}{a^3}, \forall \cos \theta \neq 0$$

$$a^3 A_1 = -a^3 E_o + B_2 \quad (4.133)$$

El campo eléctrico en el interior de la esfera se obtiene de la Ec. (4.128):

$$\frac{\partial V_1}{\partial r} = A_1 \cos \theta \quad \frac{1}{r} \frac{\partial V_1}{\partial \theta} = -A_1 \sin \theta$$

$$\mathbb{E}_1 = -A_1 (\cos \theta \vec{a}_r - \sin \theta \vec{a}_\theta) = -A_1 \vec{a}_z \quad (4.134)$$

$$\mathbb{D}_1 = -\varepsilon_1 A_1 (\cos \theta \vec{a}_r - \sin \theta \vec{a}_\theta) = -\varepsilon_1 A_1 \vec{a}_z \quad (4.135)$$

El campo eléctrico en el exterior de la esfera es:

$$\frac{\partial V_2}{\partial r} = - \left(E_o + 2 \frac{B_2}{r^3} \right) \cos \theta \quad \frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial \theta} = - \left(-E_o + \frac{B_2}{r^3} \right) \sin \theta$$

$$\mathbb{E}_2 = \left(E_o + 2 \frac{B_2}{r^3} \right) \cos \theta \vec{a}_r + \left(-E_o + \frac{B_2}{r^3} \right) \sin \theta \vec{a}_\theta \quad (4.136)$$

$$\mathbb{E}_2 = E_o (\cos \theta \vec{a}_r - \sin \theta \vec{a}_\theta) + \frac{B_2}{r^3} (2 \cos \theta \vec{a}_r + \sin \theta \vec{a}_\theta) \quad (4.137)$$

$$\mathbb{E}_2 = E_o \vec{a}_z + \frac{B_2}{r^3} (2 \cos \theta \vec{a}_r + \sin \theta \vec{a}_\theta) \quad (4.138)$$

$$\mathbb{D}_2 = \varepsilon_2 \left(E_o + 2 \frac{B_2}{r^3} \right) \cos \theta \vec{a}_r + \varepsilon_2 \left(-E_o + \frac{B_2}{r^3} \right) \sin \theta \vec{a}_\theta \quad (4.139)$$

$$\mathbb{D}_2 = \varepsilon_2 E_o (\cos \theta \vec{a}_r - \text{sen} \theta \vec{a}_\theta) + \frac{\varepsilon_2 B_2}{r^3} (2 \cos \theta \vec{a}_r + \text{sen} \theta \vec{a}_\theta) \quad (4.140)$$

$$\mathbb{D}_2 = \varepsilon_2 E_o \vec{a}_z + \frac{\varepsilon_2 B_2}{r^3} (2 \cos \theta \vec{a}_r + \text{sen} \theta \vec{a}_\theta) \quad (4.141)$$

d. $r = a \quad D_{1r} = D_{2r}$

$$D_{1r} = -\varepsilon_1 A_1 \cos \theta \quad D_{2r} = \varepsilon_2 \left(E_o + 2 \frac{B_2}{r^3} \right) \cos \theta$$

$$-\varepsilon_1 A_1 \cos \theta = \varepsilon_2 \left(E_o + 2 \frac{B_2}{a^3} \right) \cos \theta, \text{ si } \cos \theta \neq 0:$$

$$-a^3 \varepsilon_1 A_1 = a^3 \varepsilon_2 E_o + 2 \varepsilon_2 B_2 \quad (4.142)$$

La solución de las Ecs. (4.133) y (4.142) es:

$$A_1 = -\frac{3\varepsilon_2 E_o}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \quad B_2 = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) a^3 E_o}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}$$

$$V_1 = -\frac{3\varepsilon_2 E_o}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} r \cos \theta$$

$$\mathbb{E}_1 = \frac{3\varepsilon_2 E_o}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} (\cos \theta \vec{a}_r - \text{sen} \theta \vec{a}_\theta) = \frac{3\varepsilon_2 E_o}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \vec{a}_z$$

$$\mathbb{D}_1 = \frac{3\varepsilon_1 \varepsilon_2 E_o}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} (\cos \theta \vec{a}_r - \text{sen} \theta \vec{a}_\theta) = \frac{3\varepsilon_1 \varepsilon_2 E_o}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \vec{a}_z$$

$$V_2 = \left[-1 + \left(\frac{a}{r} \right)^3 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \right] E_o r \cos \theta$$

$$\mathbb{E}_2 = \left[1 + 2 \left(\frac{a}{r} \right)^3 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \right] E_o \cos \theta \vec{a}_r + \left[-1 + \left(\frac{a}{r} \right)^3 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \right] E_o \text{sen} \theta \vec{a}_\theta$$

$$\mathbb{E}_2 = E_o \vec{a}_z + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 E_o (2 \cos \theta \vec{a}_r + \text{sen} \theta \vec{a}_\theta)$$

$$\mathbb{D}_2 = \left[1 + 2 \left(\frac{a}{r} \right)^3 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \right] \varepsilon_2 E_o \cos \theta \vec{a}_r + \left[-1 + \left(\frac{a}{r} \right)^3 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \right] \varepsilon_2 E_o \text{sen} \theta \vec{a}_\theta$$

$$\mathbb{D}_2 = \varepsilon_2 E_o \vec{a}_z + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \varepsilon_2 E_o (2 \cos \theta \vec{a}_r + \text{sen} \theta \vec{a}_\theta)$$

e. En $r = a$ $\sigma = (\mathbb{D}_2 - \mathbb{D}_1) \cdot \vec{a}_r$ la densidad de carga superficial no puede cambiar instantáneamente, por lo tanto $D_{1r} = D_{2r}$.

$$D_{1r} = D_{2r} = \frac{3\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_o \cos \theta$$

Sin embargo, se puede encontrar la carga superficial en $r = a$ y $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$:

$$dQ = \sigma dS \quad dS = a^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$dQ = \frac{3a^2\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_o \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \rightarrow Q = \frac{3a^2\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_o \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$Q = \frac{3\pi a^2\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_o$$

□

Ejemplo 13.

Dos medios dieléctricos con permitividades constantes ε_1 y ε_2 están separados por una superficie plana libre de carga. Una carga puntual Q se coloca en el medio 1, a una distancia d de la superficie. Considere que el plano yz que pasa por el origen es la superficie de separación y sitúe Q sobre el eje x en $x = -d$. Determine Q_1 y Q_2 las cargas imágenes que permiten solucionar fácilmente el problema.

SOLUCIÓN

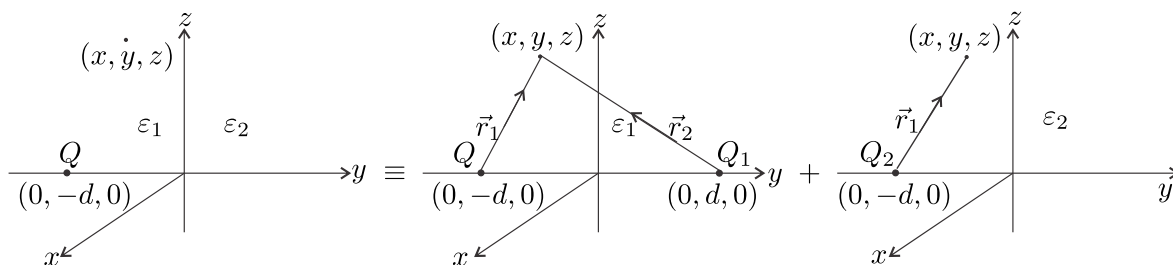


Figura 4.22 Ejemplo 13.

El sistema equivalente se establece del siguiente modo, ver Fig. 4.22.

- El potencial en el medio 1 se debe a la carga Q y su imagen Q_1 , situada en el medio 2 a la distancia d de la superficie de separación. El potencial se evalúa como si la constante dieléctrica de ambos medios fuese ε_1 .
- El potencial del medio 2 se debe a la carga Q_2 ubicada en el lugar de la Q en el medio 1. El potencial se evalúa como si la constante dieléctrica de ambos medios fuese ε_2 .

Se considera el potencial de las cargas Q y Q_1 , ambas situadas en un medio de permitividad ε_1 .

$$\vec{r}_1 = x\vec{a}_x + (y + d)\vec{a}_y + z\vec{a}_z \quad (4.143)$$

$$r_1 = [x^2 + (y + d)^2 + z^2]^{\frac{1}{2}} \quad (4.144)$$

$$\vec{r}_2 = x\vec{a}_x + (y - d)\vec{a}_y + z\vec{a}_z \quad (4.145)$$

$$r_2 = [x^2 + (y - d)^2 + z^2]^{\frac{1}{2}} \quad (4.146)$$

El potencial en $P(x, y, z)$ debido a las cargas Q y Q_1 está dado por la siguiente expresión:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{Q}{r_1} + \frac{Q_1}{r_2} \right) \quad (4.147)$$

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left[\frac{Q}{\sqrt{x^2 + (y + d)^2 + z^2}} + \frac{Q_1}{\sqrt{x^2 + (y - d)^2 + z^2}} \right] \quad (4.148)$$

El potencial en $P(x, y, z)$ debido a la carga Q_2 está dado por la siguiente expresión:

$$V_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_2 r_1} \quad (4.149)$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{Q_2}{[x^2 + (y + d)^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (4.150)$$

Se obtienen ahora los campos eléctricos de ambos medios y después los respectivos desplazamientos:

$$\mathbb{E}_1 = -\nabla V_1 \quad \mathbb{D}_1 = \epsilon_1 \mathbb{E}_1$$

$$\mathbb{E}_2 = -\nabla V_2 \quad \mathbb{D}_2 = \epsilon_2 \mathbb{E}_2$$

$$\nabla V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left[Q \nabla \left(\frac{1}{r} \right) + Q_1 \nabla \left(\frac{1}{r_1} \right) \right] \quad \nabla V_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left[Q \frac{\vec{r}}{r^3} + Q_1 \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} \right]$$

$$\mathbb{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left[Q \frac{\vec{r}}{r^3} + Q_1 \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} \right] \quad \mathbb{D}_1 = \frac{1}{4\pi} \left[Q \frac{\vec{r}}{r^3} + Q_1 \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} \right]$$

$$\mathbb{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left\{ Q \frac{x\vec{a}_x + (y+d)\vec{a}_y + z\vec{a}_z}{[x^2 + (y+d)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} + Q \frac{x\vec{a}_x + (y-d)\vec{a}_y + z\vec{a}_z}{[x^2 + (y-d)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} \quad (4.151)$$

$$\mathbb{D}_1 = \frac{1}{4\pi} \left\{ Q \frac{x\vec{a}_x + (y+d)\vec{a}_y + z\vec{a}_z}{[x^2 + (y+d)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} + Q \frac{x\vec{a}_x + (y-d)\vec{a}_y + z\vec{a}_z}{[x^2 + (y-d)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} \quad (4.152)$$

$$\mathbb{E}_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_2} \frac{x\vec{a}_x + (y+d)\vec{a}_y + z\vec{a}_z}{[x^2 + (y+d)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (4.153)$$

$$\mathbb{D}_2 = \frac{Q_2}{4\pi} \frac{x\vec{a}_x + (y+d)\vec{a}_y + z\vec{a}_z}{[x^2 + (y+d)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (4.154)$$

Condiciones de frontera:

$$\text{i.} \quad y = 0 \quad V_1 = V_2$$

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{Q + Q_1}{4\pi\epsilon_1\sqrt{x^2 + d^2 + z^2}} \quad V_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_2\sqrt{x^2 + d^2 + z^2}} \\ \frac{Q + Q_1}{4\pi\epsilon_1\sqrt{x^2 + d^2 + z^2}} &= \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_2\sqrt{x^2 + d^2 + z^2}} \\ \epsilon_2 (Q + Q_1) &= \epsilon_1 Q_2 \end{aligned} \quad (4.155)$$

$$\text{i.} \quad y = 0 \quad D_{1N} = D_{2N}$$

La componente normal del vector desplazamiento es continua en la superficie de separación de ambos medios, al igualar las componentes normales, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_1 &= \frac{1}{4\pi} \frac{(Q + Q_1)x\vec{a}_x + (Q - Q_1)d\vec{a}_y + (Q + Q_1)z\vec{a}_z}{(x^2 + d^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \mathbb{D}_2 &= \frac{Q_2}{4\pi} \frac{x\vec{a}_x + d\vec{a}_y + z\vec{a}_z}{(x^2 + d^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ Q_2 &= Q - Q_1 \end{aligned} \quad (4.156)$$

Al solucionar las Ecs. (4.155) y (4.156), se obtiene:

$$Q_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} Q \quad Q_2 = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} Q$$

□

Conclusiones:

- Si $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, entonces Q_1 y Q_2 tienen la misma naturaleza de la carga Q .
- Si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, entonces Q_1 tiene naturaleza diferente a Q y Q_2 tiene la misma naturaleza de la carga Q .

Ejemplo 14.

En coordenadas esféricas los conos $\theta = \theta_1$ y $\theta = \theta_2$ son conductores. La región 1 se extiende desde θ_1 hasta θ_o , la región 2 desde θ_o hasta θ_2 con permitividades ε_1 y ε_2 respectivamente, además $\theta_1 < \theta_o < \theta_2$. Escribir la solución general de la ecuación de Laplace para cada región y evaluar las constantes de integración eligiendo $V = 0$ en $\theta = \theta_1$, $V = V_o$ en $\theta = \theta_2$ y las condiciones de frontera en la superficie de separación dieléctrica. Los vértices de los conos se aíslan en $r = 0$.

SOLUCIÓN

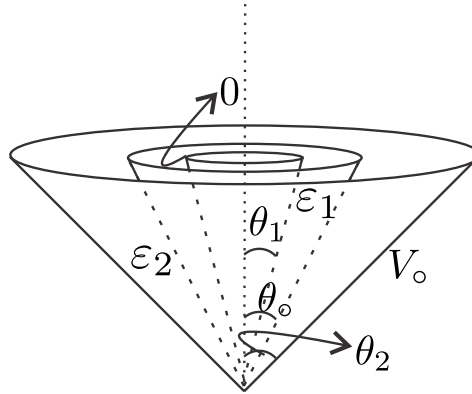


Figura 4.23 Ejemplo 14.

El potencial varía con θ . Por lo tanto, la ecuación de Laplace se reduce a:

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right) = 0 \quad \frac{dV}{d\theta} = \frac{A}{\sin \theta}$$

$$V = A \ln \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) + B \quad \mathbb{E} = -\frac{A}{r \sin \theta} \vec{a}_\theta$$

La solución general a la ecuación de Laplace en las regiones 1 y 2 en coordenadas esféricas y solamente con variación θ es:

$$V_1 = A_1 \ln \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) + B_1 \quad (4.157)$$

$$\mathbb{E}_1 = -\frac{A_1}{r \sin \theta} \vec{a}_\theta \quad (4.158)$$

$$\mathbb{D}_1 = -\frac{\varepsilon_1 A_1}{r \sin \theta} \vec{a}_\theta \quad (4.159)$$

$$V_2 = A_2 \ln \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) + B_2 \quad (4.160)$$

$$\mathbb{E}_2 = -\frac{A_2}{r \sin \theta} \vec{a}_\theta \quad (4.161)$$

$$\mathbb{D}_2 = -\frac{\varepsilon_2 A_2}{r \sin \theta} \vec{a}_\theta \quad (4.162)$$

1. En $\theta = \theta_1$ $V = 0$

$$0 = A_1 \ln \tan \left(\frac{\theta_1}{2} \right) + B_1 \rightarrow B_1 = -A_1 \ln \tan \left(\frac{\theta_1}{2} \right)$$

Si se reemplaza el valor de B_1 en la Ec.(4.157):

$$V_1 = A_1 \ln \frac{\tan \left(\frac{\theta}{2} \right)}{\tan \left(\frac{\theta_1}{2} \right)} \quad (4.163)$$

2. En $\theta = \theta_2$ $V = V_o$

$$V_o = A_2 \ln \left(\tan \frac{\theta_2}{2} \right) + B_2 \quad B_2 = -A_2 \ln \left(\tan \frac{\theta_2}{2} \right)$$

Si se reemplaza el valor de B_2 en la Ec. (4.160):

$$V_2 = V_o + A_2 \ln \frac{\tan \left(\frac{\theta}{2} \right)}{\tan \left(\frac{\theta_2}{2} \right)} \quad (4.164)$$

3. En $\theta = \theta_o$ $V_1 = V_2$

$$\begin{aligned}
V_1 &= A_1 \ln \frac{\tan\left(\frac{\theta_o}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)} & V_2 &= V_o + A_2 \ln \frac{\tan\left(\frac{\theta_o}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)} \\
A_1 \ln \frac{\tan\left(\frac{\theta_o}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)} &= V_o + A_2 \ln \frac{\tan\left(\frac{\theta_o}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}
\end{aligned} \tag{4.165}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad \text{En } \theta = \theta_o \quad D_{1N} &= D_{2N} \\
\mathbb{D}_1 &= -\frac{\varepsilon_1 A_1}{r \sin \theta_o} \vec{a}_\theta & \mathbb{D}_2 &= -\frac{\varepsilon_2 A_2}{r \sin \theta_o} \vec{a}_\theta \\
-\frac{\varepsilon_1 A_1}{r \sin \theta_o} &= -\frac{\varepsilon_2 A_2}{r \sin \theta_o} \\
\frac{\varepsilon_1 A_1}{r \sin \theta_o} &= \frac{\varepsilon_2 A_2}{r \sin \theta_o}, \text{ para } \forall \ r \neq 0:
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_1 A_1 = \varepsilon_2 A_2 \tag{4.166}$$

$$m = \ln \frac{\tan\left(\frac{\theta_o}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)} \quad n = \ln \frac{\tan\left(\frac{\theta_o}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}$$

Entonces la Ec. (4.165) se puede reescribir así:

$$mA_1 = V_o + nA_2 \tag{4.167}$$

Al resolver las Ecs. (4.166) y (4.167), se obtienen:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{V_o}{\ln \frac{\tan\left(\frac{\theta_o}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} n} & A_2 &= \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} A_1 = \frac{V_o}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} m - n}
\end{aligned}$$

Remplazando los valores de m y n :

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{V_o}{\ln \frac{\tan\left(\frac{\theta_o}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \ln \frac{\tan\left(\frac{\theta_o}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}} & A_2 &= \frac{V_o}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \ln \frac{\tan\left(\frac{\theta_o}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)} - \ln \frac{\tan\left(\frac{\theta_o}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}}
\end{aligned}$$

Si A_1 y A_2 se remplazan en las Ecs. (4.163), (4.158) y (4.159), se llega a:

$$V_1 = \frac{V_o \ln \frac{\tan\left(\frac{\theta_o}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}}{\ln \frac{\tan\left(\frac{\theta_o}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \ln \frac{\tan\left(\frac{\theta_o}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}} \quad \square$$

$$\mathbb{E}_1 = -\frac{V_o}{\ln \frac{\tan\left(\frac{\theta_o}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \ln \frac{\tan\left(\frac{\theta_o}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}} \frac{1}{r \sin \theta} \vec{a}_\theta \quad \square$$

$$\mathbb{D}_1 = -\frac{\varepsilon_1 V_o}{\ln \frac{\tan\left(\frac{\theta_o}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \ln \frac{\tan\left(\frac{\theta_o}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}} \frac{1}{r \sin \theta} \vec{a}_\theta \quad \square$$

Si A_1 y A_2 se rempazan en las Ecs. (4.164), (4.161) y (4.162), se llega a:

$$V_2 = V_o + \frac{V_o \ln \frac{\tan\left(\frac{\theta_o}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \ln \frac{\tan\left(\frac{\theta_o}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)} - \ln \frac{\tan\left(\frac{\theta_o}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}}$$

$$V_2 = V_o \left[1 + \frac{\ln \frac{\tan\left(\frac{\theta_o}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}}{\ln \frac{\tan\left(\frac{\theta_o}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \ln \frac{\tan\left(\frac{\theta_o}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}} \right] \quad \square$$

$$\mathbb{E}_2 = -\frac{V_o}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \ln \frac{\tan\left(\frac{\theta_o}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)} - \ln \frac{\tan\left(\frac{\theta_o}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}} \frac{1}{r \sin \theta} \vec{a}_\theta \quad \square$$

$$\mathbb{D}_2 = -\frac{\varepsilon_2 V_o}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \ln \frac{\tan\left(\frac{\theta_o}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)} - \ln \frac{\tan\left(\frac{\theta_o}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}} \frac{1}{r \sin \theta} \vec{a}_\theta \quad \square$$

Ejemplo 15.

Un sistema está formado por una esfera conductora de radio a , una capa esférica conductora de radio interior $c = 2a$ concéntrica con la anterior y una capa esféri-

ca aislante, concéntrica con las anteriores cuya permitividad es ε , siendo su radio interior a y el exterior $b = \frac{2a}{3}$, ver Fig 26. Se aterrizan la esfera y la capa conductora. En la superficie exterior de la capa aislante existe una distribución de carga superficial σ constante. Calcular:

- $\mathbb{D}$ y $\mathbb{E}$ entre a y c .
- las densidades de carga superficial sobre las superficies de radios a y c
- la densidad de carga volumétrica latente.
- la densidad de carga superficial de polarización sobre la superficie aislante en contacto con la esfera de radio a .

SOLUCIÓN

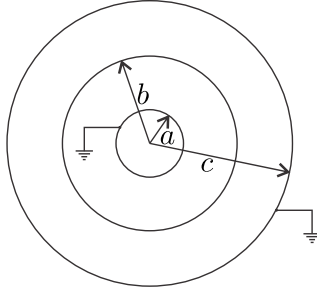


Figura 4.24 Ejemplo 15.

De acuerdo a las condiciones del problema se tiene:

$$a. \quad V_a = V_c = 0$$

$$\int_{V_a}^{V_c} dV = - \oint_C \mathbb{E} \cdot \vec{d\ell} = 0$$

$$r > c$$

$$\oint_S \mathbb{D} \cdot d\mathbb{S} = \sum Q = Q_a + Q_b + Q_c$$

$$Q_a + Q_b + Q_c = 0 \longrightarrow Q_b = -(Q_a + Q_c)$$

$$\text{Por lo tanto: } \sigma 4\pi b^2 = -(\sigma_a a^2 + \sigma_c c^2) 4\pi \longrightarrow b^2 \sigma = -(a^2 \sigma_a + c^2 \sigma_c)$$

$$a < r < b$$

$$\oint_S \mathbb{D}_1 \cdot d\mathbb{S} = D_1 4\pi r^2 = Q_a$$

$$D_1 = \frac{Q_a}{4\pi r^2} \quad E_1 = \frac{Q_a}{4\pi \varepsilon r^2}$$

$$b < r < c$$

$$\oint_S \mathbb{D}_2 \cdot d\mathbb{S} = D_2 4\pi r^2 = Q_a + Q_b$$

$$D_2 = \frac{Q_a + Q_b}{4\pi r^2} \quad E_2 = \frac{Q_a + Q_b}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$$

$$\oint_C \mathbb{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b \mathbb{E}_1 \cdot d\vec{\ell} + \int_b^c \mathbb{E}_2 \cdot d\vec{\ell} = \frac{Q_a}{4\pi \varepsilon} \int_a^b \frac{dr}{r^2} + \frac{Q_a + Q_b}{4\pi \varepsilon_0} \int_b^c \frac{dr}{r^2} = 0$$

$$\frac{Q_a}{4\pi \varepsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{Q_a + Q_b}{4\pi \varepsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) = 0$$

Se reemplaza $b = \frac{3a}{2}$ y $c = 2a$, para llegar a:

$$Q_a = -\frac{\varepsilon Q_b}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} \quad Q_c = -\frac{2\varepsilon_0 Q_b}{2\varepsilon_0 + \varepsilon}$$

$$\mathbb{D}_1 = -\frac{\varepsilon Q_b}{4\pi (2\varepsilon_0 + \varepsilon) r^2} \vec{a}_r \quad \mathbb{E}_1 = -\frac{Q_b}{4\pi (2\varepsilon_0 + \varepsilon) r^2} \vec{a}_r$$

□

$$\mathbb{D}_2 = \frac{Q_a + Q_b}{4\pi r^2} \vec{a}_r = -\frac{Q_c}{4\pi r^2} \vec{a}_r$$

$$\mathbb{D}_2 = \frac{2\varepsilon_0 Q_b}{4\pi (2\varepsilon_0 + \varepsilon) r^2} \vec{a}_r \quad \mathbb{E}_2 = \frac{Q_b}{2\pi (2\varepsilon_0 + \varepsilon) r^2} \vec{a}_r$$

b. Densidades de carga superficiales σ_a y σ_c :

Se sabe que $\sigma_b = \sigma \longrightarrow Q_b = 4\pi b^2 \sigma$

$$Q_a = 4\pi a^2 \sigma_a \quad \sigma_a = \frac{Q_a}{4\pi a^2}$$

Si se reemplaza el valor de Q_a : $\sigma_a = -\frac{\varepsilon Q_b}{4\pi (2\varepsilon_0 + \varepsilon) a^2}$

Ahora se reemplaza Q_b : $\sigma_a = -\frac{\varepsilon 4\pi b^2 \sigma}{4\pi (2\varepsilon_0 + \varepsilon) a^2}$

$$\sigma_a = -\frac{b^2 \varepsilon \sigma}{(2\varepsilon_0 + \varepsilon) a^2}$$

□

Se sabe que $\sigma_c = \frac{Q_c}{4\pi c^2}$

Si se reemplaza el valor de Q_c : $\sigma_c = -\frac{2\varepsilon_o Q_b}{4\pi(2\varepsilon_o + \varepsilon)c^2}$

Ahora se reemplaza Q_b : $\sigma_c = -\frac{2\varepsilon_o 4\pi b^2 \sigma}{4\pi(2\varepsilon_o + \varepsilon)c^2}$

$$\sigma_c = -\frac{2b^2 \varepsilon_o \sigma}{(2\varepsilon_o + \varepsilon)c^2}$$

□

c. Densidad de carga volumétrica ligada o latente.

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbb{P}_1 = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 P_r), \text{ ya que } P_\theta = P_\varphi = 0$$

Se procede a calcular la polarización:

$$\mathbb{D}_1 = \varepsilon_o \mathbb{E}_1 + \mathbb{P}_1 \quad \mathbb{P}_1 = (\varepsilon - \varepsilon_o) \mathbb{E}_1 = -\frac{b^2 (\varepsilon - \varepsilon_o) \sigma}{(2\varepsilon_o + \varepsilon) r^2} \vec{a}_r$$

$$P_r = -\frac{b^2 (\varepsilon - \varepsilon_o) \sigma}{(2\varepsilon_o + \varepsilon) r^2}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 P_r) = 0$$

Por lo tanto:

$$\rho_P = 0$$

□

d. Densidad de carga superficial de polarización.

En este caso $\vec{a}_N = -\vec{a}_r$

$$\sigma_P = \mathbb{P} \cdot \vec{a}_N|_{r=a} = \left[-\frac{b^2 (\varepsilon - \varepsilon_o) \sigma}{(2\varepsilon_o + \varepsilon) r^2} \vec{a}_r \right] \cdot (-\vec{a}_r) \Big|_{r=a}$$

$$\sigma_P = \frac{b^2 (\varepsilon - \varepsilon_o) \sigma}{(2\varepsilon_o + \varepsilon) a^2}$$

□

4.13. PROBLEMAS.

Problema 1.

Una molécula polar tiene un momento de $10^{-34} [Cm]$ y se tienen $10^{28} \left[\frac{mol}{m^3} \right]$. Bajo la influencia de un campo eléctrico de $5 \left[\frac{KV}{m} \right]$ el dos por ciento de los momentos se alinean efectivamente, mientras que los restantes se alinean aleatoriamente. Determinar la polarización, la susceptibilidad eléctrica y la permitividad relativa.

Problema 2.

Una varilla dieléctrica cilíndrica de longitud ℓ de radio R se polariza en la dirección longitudinal. Si la polarización es uniforme y magnitud P_0 calcular el campo eléctrico en un punto sobre el eje de la varilla y fuera de ella.

Problema 3.

Un gran bloque de dieléctrico contiene cavidades de diferentes formas que se puede suponer no modifican apreciablemente la polarización. Demostrar que:

- Dentro de una cavidad alargada paralela a la polarización, el campo eléctrico es el mismo que en el dieléctrico.
- Dentro de una cavidad alargada de tipo disco de espesor muy pequeño el campo eléctrico es k veces mayor que en el dieléctrico.
- En el centro de una cavidad esférica es $\mathbb{E} = \frac{\mathbb{P}}{3\epsilon_0}$.

Problema 4.

Si las regiones I $x < 0$, II $0 < x < 0,1$ y III $x > 0$ tienen constantes dieléctricas 1, 2, 3 respectivamente, hallar $\mathbb{D}_3$, $\mathbb{E}_3$, $\mathbb{P}_3$ si $\mathbb{E} = 5\vec{a}_x + 5\vec{a}_y + 5\vec{a}_z \left[\frac{V}{m} \right]$.

Problema 5.

Entre las placas cilíndricas de un capacitor, que están a $0,5 [cm]$ y $2 [cm]$ respectivamente, se aplica una diferencia de potencial de $200 [KV]$. El dieléctrico está constituido por tres capas de igual rigidez dieléctrica o tensión disruptiva $E_{Dis} = 200 \left[\frac{KV}{cm} \right]$ y constantes dieléctricas 7, 4, 2 respectivamente. Encontrar la intensidad de campo eléctrico máxima y mínima en cada dieléctrico, si el diseño eléctrico se ha efectuado para trabajar en condiciones óptimas de aislamiento. Si los dieléctricos tienen igual rigidez dieléctrica, las mejores condiciones de trabajo se tienen cuando $E_{máx}$ es el mismo en cada dieléctrico.

Problema 6.

Si $\mathbb{E} = \cos x \sin y \vec{a}_x + \sin x \cos y \vec{a}_y$, hallar el trabajo en Julios que hay que llevar a cabo para transportar una carga de $+1 [C]$ alrededor de una circunferencia en el plano xy , si el círculo está centrado en él y es de radio $5 [cm]$.

Problema 7.

Una varilla dieléctrica delgada de sección circular S , se extiende sobre el eje z , desde $z = 0$ a $z = \ell$. La polarización de la varilla es a lo largo del eje z y está dada por $\mathbb{P} = (az^2 + b) \vec{a}_z$. Hallar:

- la densidad superficial de carga de polarización en los extremos.
- la densidad de carga volumétrica de carga latente.
- demostrar explícitamente que la carga total de polarización es nula.

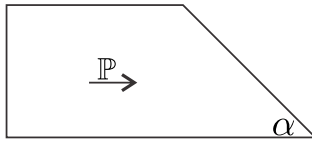


Figura 4.25 Problema 8.

Problema 8.

El bloque de dieléctrico de la Fig. () está polarizado uniformemente con polarización $\mathbb{P}$. Hallar la densidad de carga superficial de carga ligada sobre la cara 1.

Problema 9.

Un cable coaxial tiene un dieléctrico compuesto. El conductor interior tiene un radio exterior a ; éste está rodeado por una cubierta de dieléctrico de constante dieléctrica k_1 , y radio exterior b . A continuación hay otra cubierta de dieléctrico de permitividad relativa k_2 y de radio exterior c . Si se establece una diferencia de potencial V_0 entre los conductores, calcular la polarización en cada dieléctrico.

Problema 10.

Una concha dieléctrica tiene un radio interior a , exterior b y permitividad ϵ . ¿Qué energía neta se requiere para moverla desde un punto muy alejado a un punto donde es concéntrica con una carga puntual Q ? Explicar el signo de la respuesta.

Problema 11.

Un capacitor formado por dos esferas concéntricas se dispone de manera que la esfera exterior se puede separar y quitar sin modificar las cargas sobre las mismas. El radio de la esfera interna es a , el de la externa b y las cargas $+Q$ y $-Q$

respectivamente.

- Si la esfera externa se quita y se vuelve a su posición original, encontrar el aumento de energía cuando las dos esferas se encuentran suficientemente alejadas.
- ¿De dónde proviene esta energía extra?

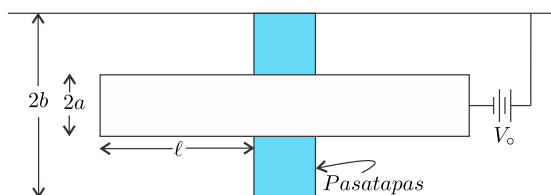


Figura 4.26 Problema 12.

Problema 12.

Un capacitor variable se construye con dos cilindros coaxiales, como se muestra en la Fig. (). El cilindro interno es sólido y libre de deslizarse sobre un pasatapas aislado. Encontrar la magnitud y la dirección de la fuerza que actúa para desplazar el cilindro central cuando una diferencia de potencial V_o se aplica entre los cilindros. Evaluar la fuerza para $b = 2a = 1 [cm]$ y $V_o = 1 [KV]$, ver Fig. 13.

13. Dos capacitores C_1 y C_2 tienen cargas Q_1 y Q_2 respectivamente.

- calcular la energía disipada cuando se conectan en paralelo.
- ¿cómo se disipa esta energía?

5

CAPÍTULO
CINCO

CAPACIDAD ELECTROSTÁTICA Y SUS APLICACIONES

Un capacitor, antiguamente llamado condensador, es un dispositivo eléctrico que consiste en dos conductores separados por un aislante. La capacitancia de un capacitor es la relación que existe entre la carga en uno de sus conductores y la diferencia de potencial entre ellos.

$$C \triangleq \frac{Q}{\Delta V} \left[F = \frac{C}{V} \right] \quad (5.1)$$

donde:

Q : carga en una de las placas conductoras.

ΔV : diferencia de potencial entre las placas conductoras.

El capacitor es un dispositivo que se utiliza para almacenar energía eléctrica en un circuito. El capacitor atenúa las fluctuaciones de una señal, acumula la carga para evitar daños al resto del circuito o inclusive cambia la frecuencia de la señal eléctrica. En los capacitores la energía se almacena en el campo eléctrico entre las placas. Muchos capacitores tienen aire como dieléctrico y tienen la ventaja de que si ocurre una chispa no queda dañado permanentemente. Cuando se requiere una gran capacitancia o tamaño físico reducido se emplean otros dieléctricos, por ejemplo: mica, porcelana, cuarzo, parafina, vidrio, baquelita, etc.

En la Fig. 5.1 la carga sobre el conductor 1, se obtiene así:

$$Q_A = \int_{S_A} \mathbb{D} \cdot d\mathbf{S} = \varepsilon \int_{S_A} \mathbb{E} \cdot d\mathbf{S}$$

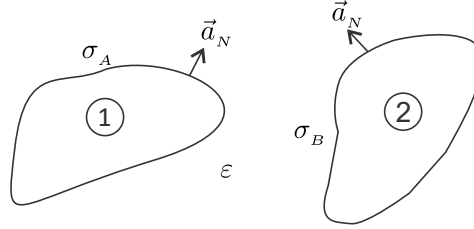


Figura 5.1 Capacitor formado por dos conductores en un medio aislante homogéneo.

La diferencia de potencial entre los conductores es:

$$\int_{V_A}^{V_B} dV = - \int_C \mathbb{E} \cdot d\vec{\ell} \rightarrow V_B - V_A = - \int_C \mathbb{E} \cdot d\vec{\ell}$$

$$C = \frac{Q_A}{V_A - V_B} = \frac{Q_B}{V_B - V_A} = \frac{\varepsilon \int_{S_A} \mathbb{E} \cdot d\mathbf{S}}{\pm \int_C \mathbb{E} \cdot d\vec{\ell}} \quad (5.2)$$

La trayectoria C de la integral es arbitraria, del conductor 1 hacia el 2, debido al carácter irrotacional del campo electrostático. Por definición la capacitancia de un sistema electrostático es mayor que cero. Este concepto se extendió a un sistema con más de dos conductores en una Unidad anterior.

5.1. Clases de capacitores.

5.1.1. I. Capacitor plano o de placas paralelas.

1. Hallar la capacidad del capacitor de placas planas y paralelas.

SOLUCIÓN:

Consiste en dos láminas paralelas planas de área S separadas por una distancia d , como se muestra en la Fig. 5.2, el medio tiene permitividad ε . Se aplica una tensión V_o entre las placas.

$$V_o = Ed \quad \varepsilon V_o = Dd$$

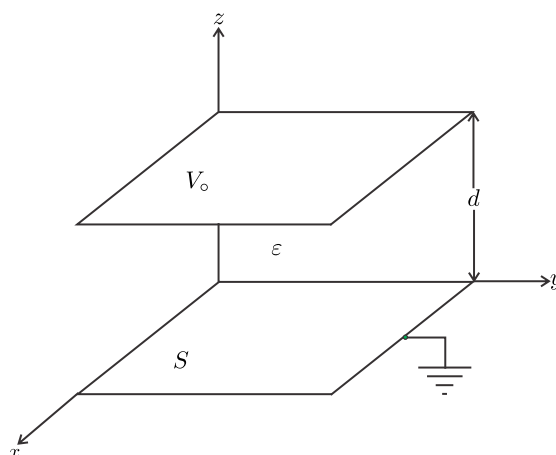


Figura 5.2 Capacitor formado por dos placas paralelas.

donde E es el campo electrostático y D es el desplazamiento eléctrico entre las placas. La carga sobre la placa superior es:

$$Q = \int D \cdot (-\vec{a}_z) \cdot dS (-\vec{a}_z)$$

Si se utiliza la Ec. (5.2):

$$C = \frac{\varepsilon ES}{Ed} = \frac{\varepsilon S}{d} \quad (5.3)$$

La capacidad de un capacitor plano es proporcional a la permitividad ε y al área S de la placa e inversamente proporcional a la distancia que las separa. Se supuso que el campo electrostático es uniforme entre las placas y cero en el exterior o sin efecto de bordes o dispersión. Éste será despreciable si las placas son grandes en comparación con la distancia entre ellas.

5.1.2. II. Capacitor cilíndrico.

2. Consiste en dos cilindros metálicos de radios a y b , $b > a$ y longitud ℓ , como se muestra en la Fig. 5.3. El medio tiene permitividad ε .

SOLUCIÓN:

La diferencia de potencial entre las placas se halla así:

$$a < r < b:$$

$$\mathbb{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r} \vec{a}_r$$

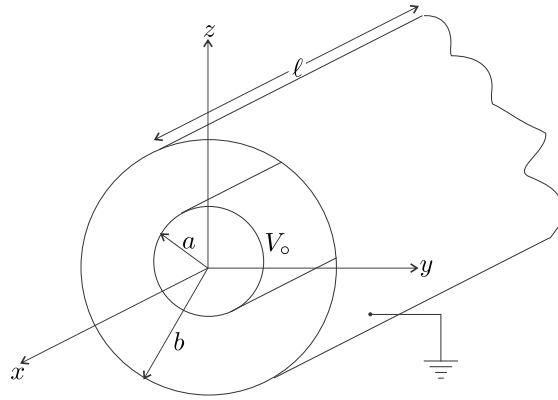


Figura 5.3 Capacitor cilíndrico.

$$\int_{V_o}^0 dV = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \int_a^b \frac{\vec{a}_r}{r} \cdot dr \vec{a}_r = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a} \rightarrow V_o = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a}$$

Ya que $\lambda = \frac{Q}{\ell}$, entonces:

$$V_o = \frac{Q}{2\pi\epsilon\ell} \ln \frac{b}{a}$$

La capacitancia del sistema es:

$$C = \frac{2\pi\epsilon\ell}{\ln \frac{b}{a}} \quad (5.4)$$

5.1.3. III. Capacitor esférico.

3. Hallar la capacidad del capacitor esférico.

SOLUCIÓN:

Consiste en dos esferas metálicas de radios a y b , $b > a$. Como se muestra en la Fig. 5.4, el medio tiene permitividad ϵ . La diferencia de potencial entre las placas se obtiene así:

$$a < r < b:$$

$$\mathbb{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \vec{a}_r$$

$$\int_{V_o}^0 dV = -\frac{Q}{4\pi\epsilon} \int_a^b \frac{\vec{a}_r}{r^2} \cdot dr \vec{a}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \rightarrow V_o = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

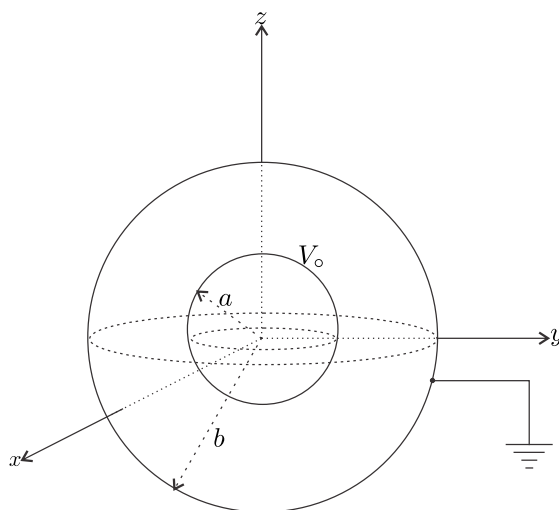


Figura 5.4 Capacitor esférico.

Para calcular la capacitancia del sistema, se procede así:

$$C = \frac{Q}{V_o} = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \quad (5.5)$$

Si se tiene una esfera aislada de radio a , la capacitancia se obtiene al considerar que el segundo conductor se encuentra muy alejado del central, o sea, $b \rightarrow \infty$, entonces la solución es:

$$C = 4\pi\epsilon a \quad (5.6)$$

5.2. Asociación de capacitores.

Los capacitores pueden conectarse de los siguientes modos:

5.2.1. I. Capacitores conectados en serie.

De acuerdo a la Ec. (5.1) y de la Fig.5.5, se tiene:

$$V = Q \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$$

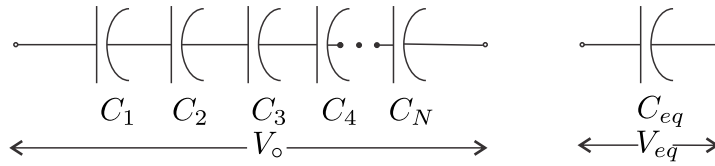


Figura 5.5 Conexión de capacitores en serie.

La capacidad equivalente se obtiene así , por lo tanto :

$$\frac{Q}{C_{eq}} = Q \sum_1^N \frac{1}{C_i}$$

$$C_{eq} = \frac{1}{\sum_1^N \frac{1}{C_i}} \quad (5.7)$$

La Ec. (5.7) expresa que la capacidad equivalente de una asociación serie, es el inverso de la suma de los recíprocos de los valores individuales de las capacidades. La carga a través de cada uno de ellos es la misma.

5.2.2. II. Capacitores conectados en paralelo.

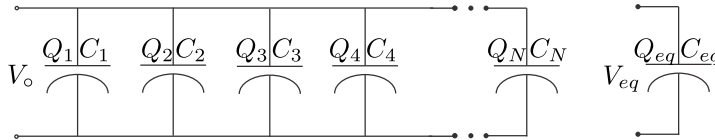


Figura 5.6 Conexión de capacitores en paralelo.

La diferencia de potencial a través de cada uno de ellos es la misma.

De acuerdo al principio de conservación de la carga, la carga total es la suma de las cargas de los capacitores individuales, entonces:

$$Q = \sum_1^N Q_i = V \sum_1^N C_i$$

La capacidad equivalente es $Q = VC_{eq}$, por lo tanto:

$$C_{eq} = \sum_1^N C_i \quad (5.8)$$

La Ec. (5.8) expresa que la capacidad equivalente de una asociación paralela, se obtiene al sumar los valores individuales de las capacidades.

5.2.3. III. Conexión mixta.

Consiste en una combinación de las anteriores.

5.3. Capacitancia de las líneas de transmisión.

La diferencia de potencial entre los conductores de una línea de transmisión ocasiona que aquéllos se comporten como un capacitor. Una tensión alterna aplicada a una línea de transmisión produce una carga y descarga de la línea, de acuerdo al valor instantáneo de la tensión. El flujo de carga se denomina corriente de carga de la línea. Esta tiene influencia sobre la caída de voltaje a lo largo de la línea, su rendimiento, factor de potencia y la estabilidad del sistema eléctrico de potencia del cual forma parte.

5.3.1. Campo eléctrico y potencial eléctrico de un conductor cilíndrico de gran longitud.

El campo eléctrico alrededor de un conductor cilíndrico de gran longitud es radial, si está aislado de otras cargas y la carga esta uniformemente distribuida en su superficie. Los puntos que equidistan del conductor constituyen una superficie equipotencial. De la Fig. 5.7:

$$\oint_S \mathbb{D} \cdot d\mathbb{S} = Q$$

$$\mathbb{D} = D\vec{a}_r \quad d\mathbb{S} = dS\vec{a}_r \quad Q = 2\pi a\sigma\ell$$

El desplazamiento eléctrico es:

$$\mathbb{D} = \frac{a\sigma}{r}\vec{a}_r$$

El cilindro cuya carga está uniformemente distribuida en su superficie, puede transformarse en una línea que tiene una densidad longitudinal de carga equivalente

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{2\pi a\ell}, \text{ entonces:}$$

$$\sigma = \frac{\lambda}{2\pi a} \quad (5.9)$$

Por lo tanto, el campo eléctrico es:

$$\mathbb{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o r} \vec{a}_r \quad (5.10)$$

La línea de carga se supone infinitamente larga y de aquí que tenga una carga muy grande. Por lo tanto, no es posible elegir el potencial cero en el infinito. El potencial de referencia se escoge a una distancia R_o , que puede tomarse tan lejos como se quiera. El potencial, entre esta referencia y otro punto, debido a un conductor cilíndrico de gran longitud, se determina así:

$$dV = -\mathbb{E} \cdot d\vec{\ell} \quad \int_V^0 dV = - \int_r^{R_o} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o r} \vec{a}_r \cdot dr \vec{a}_r$$

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{R_o}{r} \quad r \geq a \quad (5.11)$$

La Ec. (5.11) es sólo válida para $r \geq a$, ya que en el interior del conductor cilíndrico el potencial es constante e igual a:

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{R_o}{a} \quad r \leq a \quad (5.12)$$

En la Ec. (5.12) se nota que el potencial es independiente del radio del cilindro y es el mismo si el cilindro se transforma en una línea de carga cuyo eje está en el centro de aquél. A aquélla se denomina imagen de las cargas reales, que se encuentran sobre la superficie conductora.

5.3.2. Potencial de un conductor cilíndrico en un grupo.

El estudio se referirá determinar los potenciales en las superficies de los conductores A , B y C que ocupan las posiciones 1, 2 y 3 de radios R_1 , R_2 y R_3 y densidades longitudinales de carga λ_A , λ_B y λ_C respectivamente. La distancia que existe entre un par de conductores que ocupan las posiciones i y j se denomina D_{ij} . Puesto que

los conductores están aislados de tierra $\sum_1^N \lambda_i = 0$

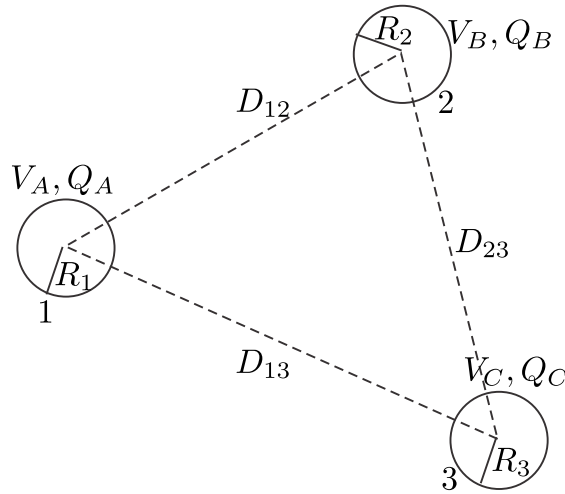


Figura 5.7 Conductor 1 en un grupo de conductores.

Para determinar el potencial de un conductor se tiene en cuenta la contribución del mismo más la de los restantes. Así:

$$\begin{aligned}
 V_A &= \frac{Q_A}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{R_o}{R_1} + \frac{Q_B}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{R_o}{D_{12}} + \frac{Q_C}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{R_o}{D_{13}} \\
 V_B &= \frac{Q_A}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{R_o}{D_{21}} + \frac{Q_B}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{R_o}{R_2} + \frac{Q_C}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{R_o}{D_{23}} \\
 V_C &= \frac{Q_A}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{R_o}{D_{31}} + \frac{Q_B}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{R_o}{D_{32}} + \frac{Q_C}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{R_o}{R_3}
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Se define:

$$a_{ij} = \frac{1}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{R_o}{D_{ij}} \tag{5.14}$$

En la Ec. (5.14) el numerador del factor logarítmico es la distancia del conductor al punto donde se toma el potencial cero, que puede hallarse tan lejos como se quiera de él y el denominador es la distancia entre los centros de los conductores que ocupan las posiciones i y j . Note que i es el conductor sobre el cual se evalúa el potencial y j el que ejerce influencia sobre i . Estos coeficientes reciben el nombre de Coeficientes de Maxwell. Las ecuaciones obtenidas para estos conductores se pueden ampliar o reducir convenientemente.

$$a_{ii} = \frac{1}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{R_o}{D_{ii}} \quad (5.15)$$

En la Ec. (5.15) el numerador del factor logarítmico es la distancia del conductor i al punto donde se toma el potencial cero, que puede hallarse tan lejos como se quiera de él y el denominador es el radio del conductor que ocupa esta posición, o sea $R_i = D_{ii}$. Note que i es el conductor sobre el cual se evalúa el potencial y en este caso es la influencia que ejerce sobre sí mismo. De la Fig. 5.7, se observa que $D_{ij} = D_{ji}$, por lo tanto:

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (5.16)$$

La Ec. (5.13) puede reescribirse:

$$\begin{aligned} V_A &= a_{11}Q_A + a_{12}Q_B + a_{13}Q_C \\ V_B &= a_{21}Q_A + a_{22}Q_B + a_{23}Q_C \\ V_C &= a_{31}Q_A + a_{32}Q_B + a_{33}Q_C \end{aligned} \quad (5.17)$$

Entonces, la expresión general es:

$$\begin{vmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_A \\ Q_B \\ Q_C \end{vmatrix} \quad (5.18)$$

En general:

$$|V| = |A||Q| \quad (5.19)$$

5.4. Capacitancia de una línea monofásica.

Para determinar la capacitancia de la línea monofásica se halla el potencial de los conductores A y B , se encuentra la diferencia de potencial entre estos y se emplea la definición de capacidad. La Fig. 5.8 representa dos conductores idénticos de radio R de una línea monofásica separados una distancia D . Se supone que la tierra esta

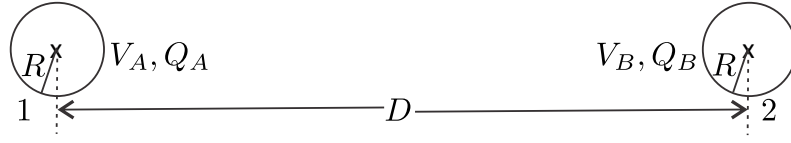


Figura 5.8 Vista frontal de una línea monofásica.

bastante alejada de los conductores para despreciar su efecto. En este caso, se debe tener presente que:

$$\begin{aligned} D_{11} &= D_{22} = R & D_{12} &= D_{21} = D \\ a_{11} &= a_{22} & a_{12} &= a_{21} \\ Q_A + Q_B &= 0 & Q_B &= -Q_A \end{aligned}$$

De la Ec. (5.19):

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} V_A \\ V_B \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_A \\ Q_B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{11} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_A \\ -Q_A \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} V_A - V_B \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} - a_{12} & a_{12} - a_{11} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_A \\ -Q_A \end{vmatrix} \end{aligned}$$

La diferencia de potencial entre los conductores es:

$$V_A - V_B = 2(a_{11} - a_{12})$$

Entonces:

$$C_{AB} = \frac{Q_A}{V_A - V_B} = \frac{1}{2(a_{11} - a_{12})}$$

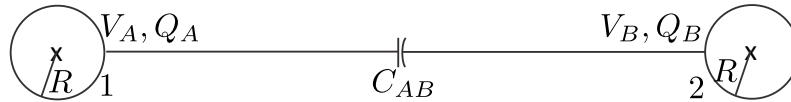


Figura 5.9 Representación de la capacidad entre dos conductores.

Si se rempazan los valores de los coeficientes, se tiene:

$$C_{AB} = \frac{\pi \epsilon_o \ell}{\ln \frac{D}{R}} \quad (5.20)$$

La Ec. (5.20) da la capacidad entre los conductores de la línea monofásica. Es conveniente conocer la capacidad entre uno de los conductores y un punto neutro. Se acostumbra que la diferencia de potencial entre cada uno de los conductores y el neutro sea la mitad de la existente entre ambos. De las Figs. 5.9 y 5.10, se tiene:



Figura 5.10 Representación de la capacidad entre un conductor y el neutro.

$$C_{AB} = \frac{C_{AN} \times C_{BN}}{C_{AN} + C_{BN}} = \frac{C_{AN}}{2} = \frac{C_N}{2}$$

ya que: $C_{AN} = C_{BN} = C_N$

Por lo tanto:

$$C_N = 2C_{AB} \quad (5.21)$$

De la Ec. (5.21), se observa que la capacidad respecto al neutro de la línea monofásica es el doble de la existente entre conductores. Así, la capacidad respecto al neutro es:

$$C_N = \frac{2\pi\epsilon_o\ell}{\ln\frac{D}{R}} \quad (5.22)$$

entonces, la capacidad respecto al neutro y por unidad de longitud es:

$$C' = \frac{2\pi\epsilon_o}{\ln\frac{D}{R}} \left[\frac{F}{m} \right] \quad (5.23)$$

$$\text{Si } \begin{cases} \epsilon_o = \frac{10^{-9}}{36\pi} \left[\frac{F}{m} \right] & \ln\frac{D}{R} = 2,3026 \log\frac{D}{R} \\ 1 [milla] = 1609 [m] & 1 [F] = 10^6 [\mu F] \end{cases} \quad (5.24)$$

$$C'_N = \frac{0,0388}{\log\frac{D}{R}} \left[\frac{\mu F}{milla} \right]$$

5.5. Capacitancia de una línea trifásica con disposición equilátera.

La Fig. 5.11, representa los tres conductores idénticos de radio R de una línea trifásica con disposición equilátera. Para determinar esta capacidad, se halla el

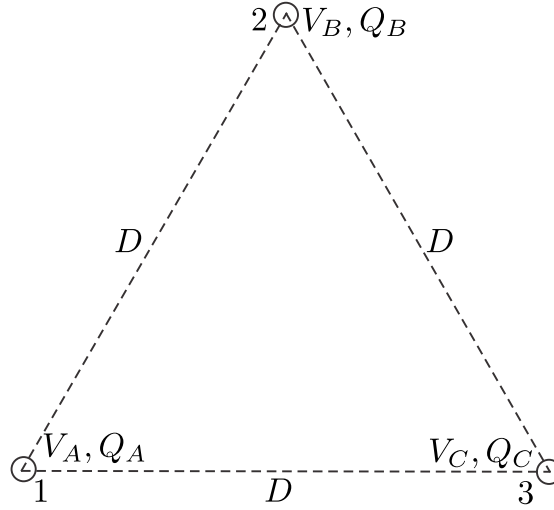


Figura 5.11 Sección transversal de una línea trifásica con disposición equilátera.

potencial de los conductores A , B y C , se encuentra la diferencia de potencial entre el conductor A y B los conductores B y C , luego se suman estas diferencias de potencial y se utiliza la definición de capacidad. Se supone que la tierra está bastante alejada de los conductores para despreciar su efecto.

En este caso, se debe tener presente que:

$$D_{11} = D_{22} = D_{33} = R \quad D_{12} = D_{21} = D_{13} = D_{31} = D_{23} = D_{32} = D$$

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} \quad a_{12} = a_{21} = a_{13} = a_{31} = a_{23} = a_{32}$$

$$Q_A + Q_B + Q_C = 0 \quad Q_B + Q_C = -Q_A$$

Para un sistema trifásico balanceado:

$$V_A - V_B = V_{AN} + V_{NB} \quad V_A - V_C = V_{AN} + V_{NC} \quad V_{NB} + V_{NC} = V_{AN} \quad (5.25)$$

$$\begin{vmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_A \\ Q_B \\ Q_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{12} & a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{12} & a_{11} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_A \\ Q_B \\ Q_C \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} V_A - V_B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} - a_{12} & a_{12} - a_{11} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_A \\ Q_B \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} V_A - V_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} - a_{12} & a_{12} - a_{11} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_A \\ Q_C \end{vmatrix}$$

Si se suman las dos Ecs. anteriores:

$$|2V_{AN} + (V_{NB} + V_{NC})| = \left| \begin{matrix} 2(a_{11} - a_{12}) & a_{11} - a_{12} \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} Q_A \\ -Q_A \end{matrix} \right|$$

$$3V_{AN} = 3(a_{11} - a_{12})Q_A \quad C_{AN} = \frac{Q_A}{V_{AN}} = \frac{1}{a_{11} - a_{12}}$$

Si se rempazan los valores respectivos de los coeficientes de Maxwell, se tiene:

$$C_N = \frac{2\pi\epsilon_o\ell}{\log\frac{D}{R}} \left[\frac{F}{m} \right] \quad (5.26)$$

$$C'_N = \frac{0,0388}{\log\frac{D}{R}} \left[\frac{\mu F}{milla} \right] \quad (5.27)$$

Si se comparan las Ecs. (5.24) y (5.27) se nota que son equivalentes. Éstas expresan la capacidad respecto al neutro de una línea monofásica y de una trifásica con disposición equilátera, respectivamente.

5.6. Capacitancia de una línea trifásica con disposición asimétrica y transpuesta.

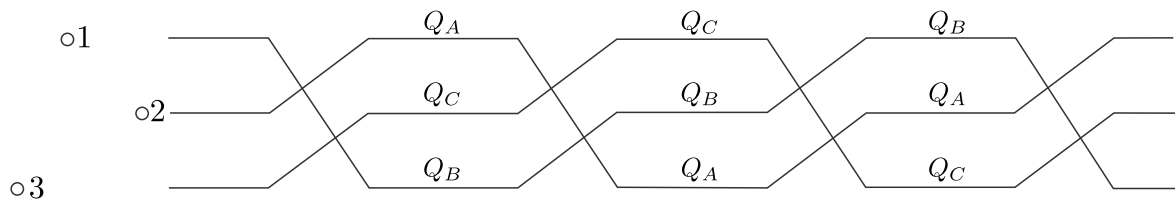


Figura 5.12 Línea trifásica con disposición asimétrica y transpuesta.

Si los conductores de una línea trifásica no están dispuestos en triángulo equilátero, el cálculo de la capacidad es complicado. Si la posición de los conductores se intercambia a intervalos regulares a lo largo de la línea, cada conductor ocupa la posición de cada uno de los otros sobre una distancia igual, este cambio de posiciones de los conductores se denomina transposición, ver Fig. 5.12.

Si la línea no tiene transposición las capacidades de cada fase con respecto al neutro son diferentes. Si la línea tiene transposición la capacidad promedio con respecto

al neutro de una de las fases, en el ciclo de transposición, es equivalente a la de cualquier otra.

Al utilizar la Ec. (5.19) hay que tener presente que la separación entre líneas no es constante. La asimetría de las líneas sin transposición es despreciable en montajes usuales y la capacidad se evalúa como si existiera transposición.

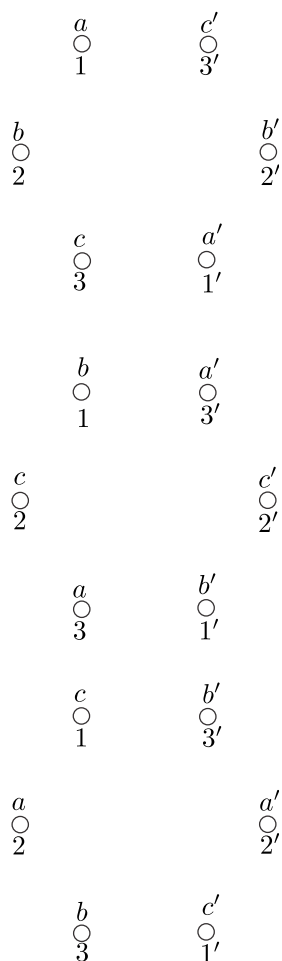


Figura 5.13 Sección transversal de una línea trifásica transpuesta de circuitos paralelos.

La tensión con respecto al neutro de una fase cualquiera, si se desprecia la caída de tensión de esa fase con respecto al neutro a lo largo de la línea, en una de las disposiciones del ciclo, es igual en cualquiera de las otras posiciones del ciclo de transposición.

En el caso que se va a considerar la densidad de carga longitudinal se supone la

misma en todos los tramos del ciclo, así la tensión entre cada par de conductores es diferente a lo largo del ciclo de transposición. Entonces, se halla el potencial de los conductores A , B y C en cada tramo del ciclo de transposición, se promedian estas diferencias de potencial obtenidas y se utiliza la definición de capacidad.

En este caso se debe tener presente que:

$$D_{11} = D_{22} = D_{33} = R \quad D_{12} = D_{21} \quad D_{13} = D_{31} \quad D_{23} = D_{32}$$

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} \quad a_{12} = a_{21} \quad a_{13} = a_{31} \quad a_{23} = a_{32}$$

$$Q_A + Q_B + Q_C = 0 \quad Q_B + Q_C = -Q_A$$

$$\begin{vmatrix} V_{Ai} \\ V_{Bi} \\ V_{Ci} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_A \\ Q_B \\ Q_C \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} V_{Aj} \\ V_{Bj} \\ V_{Cj} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_A \\ Q_B \\ Q_C \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} V_{Ak} \\ V_{Bk} \\ V_{Ck} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} \\ a_{12} & a_{13} & a_{11} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_A \\ Q_B \\ Q_C \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} V_{Ai} \\ V_{Bi} \\ V_{Ci} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{11} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{11} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_A \\ Q_B \\ Q_C \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} V_{Aj} \\ V_{Bj} \\ V_{Cj} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{23} \\ a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{23} & a_{12} & a_{11} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_A \\ Q_B \\ Q_C \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} V_{Ak} \\ V_{Bk} \\ V_{Ck} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{23} & a_{12} \\ a_{23} & a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{13} & a_{11} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_A \\ Q_B \\ Q_C \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} V_{Ai} - V_{Bi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} - a_{12} & a_{12} - a_{11} & a_{13} - a_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_A \\ Q_B \\ Q_C \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} V_{Aj} - V_{Bj} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} - a_{13} & a_{13} - a_{11} & a_{23} - a_{12} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_A \\ Q_B \\ Q_C \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} V_{Ak} - V_{Bk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} - a_{23} & a_{23} - a_{11} & a_{12} - a_{13} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_A \\ Q_B \\ Q_C \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} V_A - V_B \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \left[\begin{vmatrix} V_{Ai} - V_{Bi} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} V_{Aj} - V_{Bj} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} V_{Ak} - V_{Bk} \end{vmatrix} \right] \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned}
 \left| V_{Ai} - V_{Ci} \right| &= \left| \begin{matrix} a_{11} - a_{13} & a_{12} - a_{23} & a_{13} - a_{11} \end{matrix} \right| \begin{vmatrix} Q_A \\ Q_B \\ Q_C \end{vmatrix} \\
 \left| V_{Aj} - V_{Cj} \right| &= \left| \begin{matrix} a_{11} - a_{23} & a_{13} - a_{12} & a_{23} - a_{11} \end{matrix} \right| \begin{vmatrix} Q_A \\ Q_B \\ Q_C \end{vmatrix} \\
 \left| V_{Ak} - V_{Ck} \right| &= \left| \begin{matrix} a_{11} - a_{12} & a_{23} - a_{13} & a_{12} - a_{11} \end{matrix} \right| \begin{vmatrix} Q_A \\ Q_B \\ Q_C \end{vmatrix} \\
 \left| V_A - V_c \right| &= \frac{1}{3} \left[\left| V_{Ai} - V_{Ci} \right| + \left| V_{Aj} - V_{Cj} \right| + \left| V_{Ak} - V_{Ck} \right| \right] \quad (5.29)
 \end{aligned}$$

Si se remplazan las diferencias de potencial anteriores en las Ecs. (5.28) y (5.29) y luego se suman éstas, se tiene:

$$\begin{aligned}
 2V_{AN} + (V_{NB} + V_{NC}) &= 3V_{AN} \\
 3V_{AN} &= \frac{1}{3} [9a_{11} - 3(a_{12} + a_{13} + a_{23})] Q_A \\
 V_{AN} &= \left[a_{11} - \frac{a_{12} + a_{13} + a_{23}}{3} \right] Q_A \\
 C_{AN} &= \frac{1}{a_{11} - \frac{a_{12} + a_{13} + a_{23}}{3}}
 \end{aligned}$$

Si se remplazan los valores respectivos de los coeficientes de Maxwell, se tiene:

$$C_{AN} = \frac{2\pi\epsilon_o\ell}{\ln \frac{\sqrt[3]{D_{12}D_{13}D_{23}}}{R}} [F] \quad (5.30)$$

$$D_{eq} \triangleq \sqrt[3]{D_{12}D_{13}D_{23}} \quad (5.31)$$

$$C_{AN} = \frac{2\pi\epsilon_o\ell}{\ln \frac{D_{eq}}{R}} [F] \quad (5.32)$$

$$C'_{AN} = \frac{0,0388}{\log \frac{D_{eq}}{R}} \left[\frac{\mu F}{milla} \right] \quad (5.33)$$

La Ec. (5.31) es la media geométrica de las tres distancias de la línea asimétrica e indica la separación equilátera equivalente. La Ec. (5.33) da la capacidad con respecto al neutro y por unidad de longitud de la línea trifásica con transposición y disposición asimétrica. Note la semejanza con las Ecs. (5.24), (5.29) y (5.33). Si en la Ec. (5.31): $D_{12} = D_{13} = D_{23} = D$, entonces $D_{eq} = D$, y la Ec. (5.33) se transforma en la Ec. (5.27) que expresa la capacidad de la línea trifásica con disposición equilátera.

5.7. Efecto de la tierra sobre la capacitancia de las líneas de transmisión aéreas.

Las líneas no están ubicadas en un espacio completamente aéreo sino en la vecindad de la tierra, la cual se ha de considerar como conductora. A causa del potencial constante de la tierra, las líneas de campo eléctrico son normales a aquélla y la influencia de la tierra sobre el potencial de los conductores se obtiene empleando el método de las imágenes.

Se considera que la tierra está a potencial cero y así los potenciales de las líneas resultan equivalentes a las tensiones de los conductores con respecto a tierra. El estudio se referirá a determinar los potenciales en las superficies de los conductores A , B y C . Las ecuaciones obtenidas, para más o menos conductores, se pueden ampliar o reducir convenientemente.

Para determinar el potencial de un conductor se debe tener en cuenta la contribución del propio conductor más el de los restantes.

$$\begin{aligned}
 V_A &= \frac{Q_A}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{R_o}{R_1} - \frac{Q_A}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{R_o}{D_{11'}} + \frac{Q_B}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{R_o}{D_{12}} - \frac{Q_B}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{R_o}{D_{12'}} + \frac{Q_C}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{R_o}{D_{13}} - \frac{Q_C}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{R_o}{D_{13'}} \\
 V_B &= \frac{Q_A}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{R_o}{D_{21}} - \frac{Q_A}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{R_o}{D_{21'}} + \frac{Q_B}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{R_o}{R_2} - \frac{Q_B}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{R_o}{D_{22'}} + \frac{Q_C}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{R_o}{D_{23}} - \frac{Q_C}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{R_o}{D_{23'}} \\
 V_C &= \frac{Q_A}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{R_o}{D_{31}} - \frac{Q_A}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{R_o}{D_{31'}} + \frac{Q_B}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{R_o}{D_{32}} - \frac{Q_B}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{R_o}{D_{32'}} + \frac{Q_C}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{R_o}{R_3} - \frac{Q_C}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{R_o}{D_{33'}}
 \end{aligned}
 \tag{5.34}$$

Si se factoriza, se tiene:

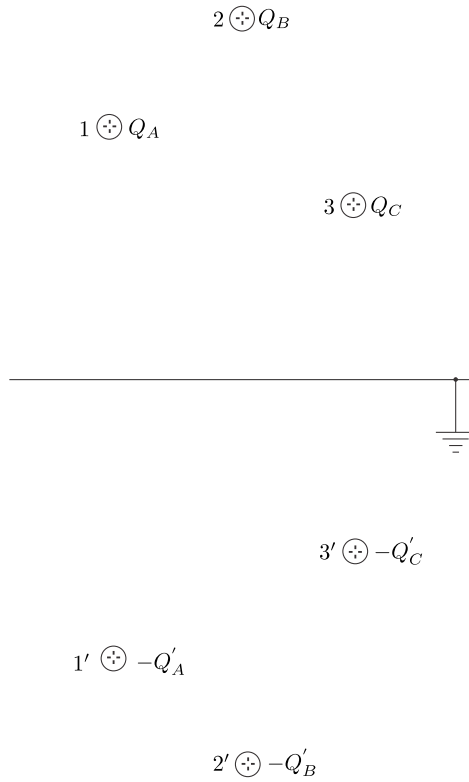


Figura 5.14 Línea de tres conductores y sus imágenes.

$$\begin{aligned}
 V_A &= \frac{Q_A}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{D_{11'}}{R_1} + \frac{Q_B}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{D_{12'}}{D_{12}} + \frac{Q_C}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{D_{13'}}{D_{13}} \\
 V_B &= \frac{Q_A}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{D_{21'}}{D_{21}} + \frac{Q_B}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{D_{22'}}{R_2} + \frac{Q_C}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{D_{23'}}{D_{23}} \\
 V_C &= \frac{Q_A}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{D_{31'}}{D_{31}} + \frac{Q_B}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{D_{32'}}{D_{32}} + \frac{Q_C}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{D_{33'}}{R_3}
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

Se define:

$$b_{ij} \triangleq \frac{1}{2\pi\epsilon_o\ell} \ln \frac{D_{ij'}}{D_{ij}} \tag{5.36}$$

En la Ec. (5.36):

1. Si $i \neq j$, el numerador del término logarítmico es la distancia entre el conductor i y la imagen de j y el denominador es la distancia entre los conductores i y j .

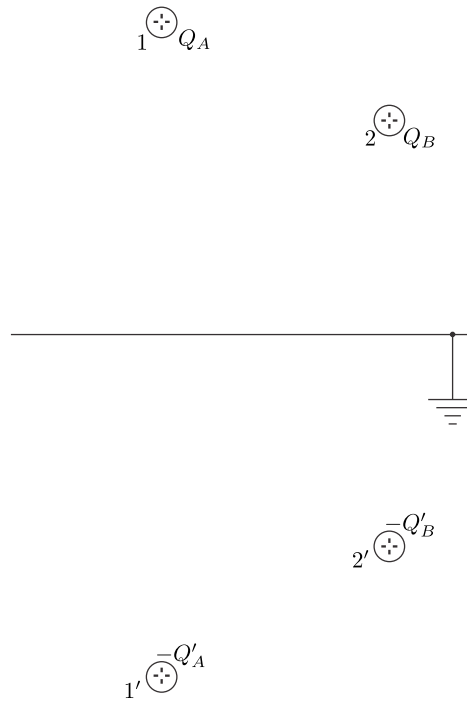


Figura 5.15 Línea de dos conductores y sus imágenes.

2. Si $i = j$, el numerador del término logarítmico es la distancia entre el conductor i y su imagen j el denominador es el radio exterior del conductor i .

La Ec. (5.35) puede reescribirse:

$$\begin{vmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_A \\ Q_B \\ Q_C \end{vmatrix} \quad (5.37)$$

La expresión general es:

$$|V| = |B| |Q| \quad (5.38)$$

5.7.1. Efecto de la tierra sobre la capacitancia de la línea monofásica.

Se procede de modo análogo a la forma como se determina la capacitancia de la línea monofásica. De la Ec. (5.38):

$$\begin{vmatrix} V_A \\ V_B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_A \\ Q_B \end{vmatrix} \quad (5.39)$$

En este caso, se debe tener presente que:

$$D_{12} = D_{21} = D_{1'2'} = D_{2'1'} \quad D_{12'} = D_{2'1} = D_{1'2} = D_{21'} \quad R_1 = R_2 = R$$

$$Q_A + Q_B = 0 \quad Q_A = -Q_B$$

De la Ec. (5.39):

$$\begin{vmatrix} V_A - V_B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} - b_{21} & b_{12} - b_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_A \\ -Q_A \end{vmatrix}$$

La diferencia de potencial entre los conductores es:

$$V_A - V_B = [(b_{11} + b_{22}) - (b_{12} + b_{21})] Q_A \quad (5.40)$$

entonces:

$$C_{AB} = \frac{1}{b_{11} + b_{22} - (b_{12} + b_{21})}$$

Si se remplazan los valores de los coeficientes, se tiene:

$$C_{AB} = \frac{2\pi\epsilon_0\ell}{\ln D_{11'} D_{22'} \left(\frac{D_{12}}{R D_{12'}} \right)^2} [F] \quad (5.41)$$

Si los conductores están a la misma altura sobre tierra:

$$D_{11'} = D_{22'} \quad (5.42)$$

entonces:

$$C'_{AB} = \frac{0,0194}{\log \frac{D_{11'} D_{12}}{R D_{12'}}} \left[\frac{\mu F}{milla} \right] \quad (5.43)$$

5.7.2. Efecto de la tierra sobre la capacitancia de una línea trifásica con disposición asimétrica y transpuesta.

Las ecuaciones que se plantean son en base a la Fig. 5.13 y el procedimiento es el mismo que se utiliza para obtener la capacitancia de una línea trifásica con disposición asimétrica y transpuesta. Note que las ecuaciones que se deducirán son análogas a las obtenidas allí, con la diferencia que los coeficientes de Maxwell están definidos teniendo en cuenta el efecto de tierra.

$$\begin{vmatrix} V_{Ai} \\ V_{Bi} \\ V_{Ci} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_A \\ Q_B \\ Q_C \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} V_{Aj} \\ V_{Bj} \\ V_{Cj} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{33} & b_{31} & b_{32} \\ b_{13} & b_{11} & b_{12} \\ b_{23} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_A \\ Q_B \\ Q_C \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} V_{Ak} \\ V_{Bk} \\ V_{Ck} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} & b_{21} \\ b_{32} & b_{33} & b_{31} \\ b_{12} & b_{13} & b_{11} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_A \\ Q_B \\ Q_C \end{vmatrix}$$

Se debe tener presente que:

$$b_{12} = b_{21} \quad b_{13} = b_{31} \quad b_{23} = b_{32}$$

$$|V_{Ai} - V_{Bi}| = \begin{vmatrix} b_{11} - b_{12} & b_{12} - b_{22} & b_{13} - b_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_A \\ Q_B \\ Q_C \end{vmatrix}$$

$$|V_{Aj} - V_{Bj}| = \begin{vmatrix} b_{33} - b_{13} & b_{13} - b_{11} & b_{23} - b_{12} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_A \\ Q_B \\ Q_C \end{vmatrix}$$

$$|V_{Ak} - V_{Bk}| = \begin{vmatrix} b_{22} - b_{23} & b_{23} - b_{33} & b_{12} - b_{13} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_A \\ Q_B \\ Q_C \end{vmatrix}$$

$$|V_{Ai} - V_{Ci}| = \begin{vmatrix} b_{11} - b_{13} & b_{12} - b_{23} & b_{13} - b_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_A \\ Q_B \\ Q_C \end{vmatrix}$$

$$|V_{Aj} - V_{Cj}| = \begin{vmatrix} b_{33} - b_{23} & b_{13} - b_{12} & b_{23} - b_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_A \\ Q_B \\ Q_C \end{vmatrix}$$

$$|V_{Ak} - V_{Ck}| = \begin{vmatrix} b_{22} - b_{12} & b_{23} - b_{13} & b_{12} - b_{11} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_A \\ Q_B \\ Q_C \end{vmatrix}$$

Si se sustituyen estos valores en las Ecs. (5.28) y (5.29), se tiene presente el conjunto de Ecs. (5.25) y luego de efectuar simplificaciones, por fin, se tiene:

$$A = b_{11} + b_{22} + b_{33} - (b_{12} + b_{13} + b_{23})$$

$$|V_{AN} + V_{NB}| = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} A & -A & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_A \\ Q_B \\ Q_C \end{vmatrix}$$

$$|V_{AN} + V_{NC}| = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} A & 0 & -A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_A \\ Q_B \\ Q_C \end{vmatrix}$$

$$|2V_{AN} + V_{NB} + V_{NC}| = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} A & -A & -A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_A \\ Q_B \\ Q_C \end{vmatrix}$$

$$|3V_{AN}| = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 2A & A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_A \\ -(Q_B + Q_C) \end{vmatrix}$$

Pero: $Q_A = -(Q_B + Q_C)$, entonces:

$$3V_{AN} = AQ_A \rightarrow C_{AN} = \frac{Q_A}{V_{AN}}$$

$$C_{AN} = \frac{1}{\frac{b_{11} + b_{22} + b_{33}}{3} - \frac{b_{12} + b_{13} + b_{23}}{3}}$$

$$C_{AN} = \frac{2\pi\epsilon_0\ell}{\ln\frac{D_{eq}}{R} - \ln\frac{\sqrt[3]{D_{12'}D_{13'}D_{23'}}}{\sqrt[3]{D_{11'}D_{22'}D_{33'}}}} [F] \quad (5.44)$$

$$C'_{AN} = \frac{0,0388}{\ln\frac{D_{eq}}{R} - \ln\frac{\sqrt[3]{D_{12'}D_{13'}D_{23'}}}{\sqrt[3]{D_{11'}D_{22'}D_{33'}}}} \left[\frac{\mu F}{milla} \right] \quad (5.45)$$

Si se comparan las Ecs. (5.33) y (5.45), se observa que el efecto de la tierra es aumentar la capacidad de la línea. Si el efecto de tierra es despreciable el sustraendo del denominador es despreciable, lo que puede comprobarse fácilmente.

5.8. Conductores agrupados o en haz.

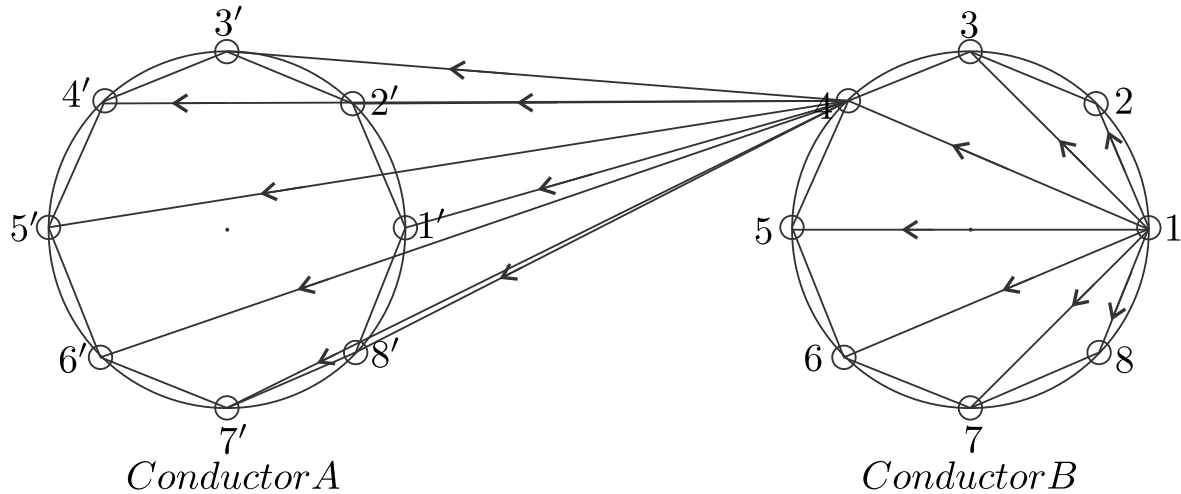


Figura 5.16 Distancia propia y mutua entre un par de conductores.

La idea de los conductores en haz se debe a Markt y Mengele. Sin ella no cabría pensar en líneas UHV (Ultra Alta Tensión).

La corriente en cada uno de los hilos de la fase A es $\frac{I}{N}$ y para la fase B es $-\frac{I}{N}$.

En relación a una línea con un conductor por fase, en igualdad de secciones totales, los efectos principales de la disposición en haz son:

- Disminución de gradientes de potencial.
- Aumento de capacidades.
- Disminución de inductancias.
- Aminoración del efecto piel.
- Mayores densidades de corriente en los hilos internos.

Las consecuencias son:

- disminución del efecto corona.
- disminución de la impedancia característica o de onda.

- c. aumento de la corriente de vacío de la línea.
- d. aumento de la potencia natural de la línea.
- e. mejora los procesos de estabilidad

$$S_1 = \sqrt[N^2]{R \left(2asen \frac{\pi}{N}\right) \left(2asen \frac{2\pi}{N}\right) \left(2asen \frac{3\pi}{N}\right) \cdots \left[2asen \frac{(N-1)\pi}{N}\right]}$$

$$S_2 = \sqrt[N^2]{\left(2asen \frac{\pi}{N}\right) \left(2asen \frac{2\pi}{N}\right) \left(2asen \frac{3\pi}{N}\right) \cdots 2aR \left[2asen \frac{(N-1)\pi}{N}\right]}$$

$$S_N = \sqrt[N^2]{\left(2asen \frac{\pi}{N}\right) \left(2asen \frac{2\pi}{N}\right) \left(2asen \frac{3\pi}{N}\right) \cdots 2aR \left[2asen \frac{(N-1)\pi}{N}\right]}$$

Por lo tanto:

$$RMG = \sqrt[N]{a^{N-1}NR} = D_s$$

$$RMG = \sqrt[N^2]{(D_{11'}D_{12'} \cdots D_{1N'}) (D_{21'}D_{22'} \cdots D_{2N'}) \cdots (D_{N1'}D_{N2'} \cdots D_{NN'})}$$

$$DMG = D = D_{eq}$$

donde:

R : radio del hilo.

a : radio de la circunferencia del haz.

N : número de hilos.

La aplicación apropiada de D_{eq} y D_s , permite utilizar la ecuación general de la capacitancia para obtenerla en cualquier sistema de conductores.

Una línea trifásica de conductores agrupados se muestra en la Fig. 5.17 se puede escribir la ecuación para la tensión sobre la superficie del conductor A , para lo cual se utiliza la Ec. (5.19). Los conductores de cualquier agrupación están en paralelo. La diferencia ocasionada por las aproximaciones es despreciable en la solución final.

Se debe tener presente que:

$$d_{11} = d_{22} = d_{33} = R \quad d_{1'1} = d_{2'2} = d_{3'3} = d$$

$$d_{12} = d_{21} = d_{1'2} = d_{21'} = d_{12'} = d_{2'1} = D_{12}$$

$$d_{13} = d_{31} = d_{1'3} = d_{31'} = d_{13'} = d_{3'1} = D_{13}$$

$$d_{23} = d_{32} = d_{2'3} = d_{32'} = d_{23'} = d_{3'2} = D_{23}$$

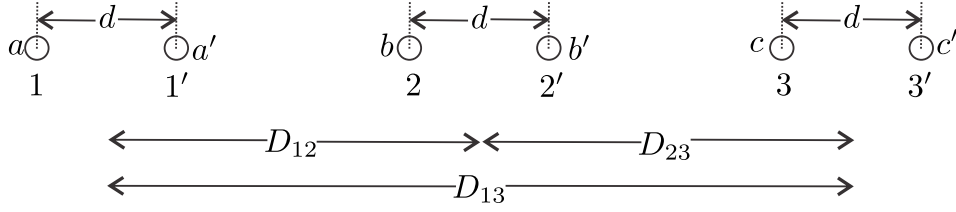


Figura 5.17 Sección transversal de una línea trifásica de conductores agrupados.

$$a_{11} = a_{22} = a_{33}$$

$$a_{11'} = a_{1'1} = a_{2'2} = a_{22'} = a_{3'3} = a_{33'}$$

$$a_{12} = a_{21} = a_{1'2} = a_{21'} = a_{12'} = a_{2'1}$$

$$a_{13} = a_{31} = a_{1'3} = a_{31'} = a_{13'} = a_{3'1}$$

$$a_{23} = a_{32} = a_{2'3} = a_{3'2} = a_{2'3} = a_{32'}$$

$$Q_a = Q_{a'} = \frac{Q_A}{2} \quad Q_b = Q_{b'} = \frac{Q_B}{2} \quad Q_c = Q_{c'} = \frac{Q_C}{2}$$

$$\begin{vmatrix} V_{Ai} \\ V_{Bi} \\ V_{Ci} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_a \\ Q_b \\ Q_c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11'} & a_{12'} & a_{13'} \\ a_{21'} & a_{22'} & a_{23'} \\ a_{31'} & a_{32'} & a_{33'} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_{a'} \\ Q_{b'} \\ Q_{c'} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} V_{Ai} \\ V_{Bi} \\ V_{Ci} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + a_{11'} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{12} & a_{11} + a_{11'} & 2a_{23} \\ 2a_{13} & 2a_{23} & a_{11} + a_{11'} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{Q_A}{2} \\ \frac{Q_B}{2} \\ \frac{Q_C}{2} \end{vmatrix} \quad (5.46)$$

$$\begin{vmatrix} V_{Aj} \\ V_{Bj} \\ V_{Cj} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_a \\ Q_b \\ Q_c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33'} & a_{31'} & a_{32'} \\ a_{13'} & a_{11'} & a_{12'} \\ a_{23'} & a_{21'} & a_{22'} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_{a'} \\ Q_{b'} \\ Q_{c'} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} V_{Aj} \\ V_{Bj} \\ V_{Cj} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + a_{11'} & 2a_{13} & 2a_{23} \\ 2a_{13} & a_{11} + a_{11'} & 2a_{12} \\ 2a_{23} & 2a_{12} & a_{11} + a_{11'} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{Q_A}{2} \\ \frac{Q_B}{2} \\ \frac{Q_C}{2} \end{vmatrix} \quad (5.47)$$

$$\begin{vmatrix} V_{Ak} \\ V_{Bk} \\ V_{Ck} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ 11 & 23 & 12 \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} \\ 23 & 11 & 13 \\ a_{12} & a_{13} & a_{11} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_a \\ Q_b \\ Q_c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22'} & a_{23'} & a_{21'} \\ 11' & 23 & 12 \\ a_{32'} & a_{33'} & a_{31'} \\ 23 & 11' & 13 \\ a_{12'} & a_{13'} & a_{11'} \\ 12 & 13 & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_{a'} \\ Q_{b'} \\ Q_{c'} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} V_{Ak} \\ V_{Bk} \\ V_{Ck} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + a_{11'} & 2a_{23} & 2a_{12} \\ 2a_{23} & a_{11} + a_{11'} & 2a_{13} \\ 2a_{12} & 2a_{13} & a_{11} + a_{11'} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{Q_A}{2} \\ \frac{Q_B}{2} \\ \frac{Q_C}{2} \end{vmatrix} \quad (5.48)$$

Si se sustituyen las Ecs. (5.46), (5.47) y (5.48) en las Ecs. (5.28) y (5.29), se obtiene:

$$|V_{AN} + V_{NB}| = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} M & -M & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{Q_A}{2} \\ \frac{Q_B}{2} \\ \frac{Q_C}{2} \end{vmatrix} \quad (5.49)$$

$$|V_{AN} + V_{NC}| = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} M & 0 & -M \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{Q_A}{2} \\ \frac{Q_B}{2} \\ \frac{Q_C}{2} \end{vmatrix} \quad (5.50)$$

donde $M = 3(a_{11} + a_{11'}) - 2(a_{12} + a_{13} + a_{23})$.

Si se suman las Ecs. (5.49) y (5.50), se obtiene:

$$|3V_{AN}| = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 2M & -M & -M \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{Q_A}{2} \\ \frac{Q_B}{2} \\ \frac{Q_C}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 2M & M \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{Q_A}{2} \\ -\left(\frac{Q_B}{2} + \frac{Q_C}{2}\right) \end{vmatrix}$$

$$C_{AN} = \frac{Q_A}{V_{AN}} = \frac{6}{M} = \frac{1}{\frac{M}{6}}$$

$$C_{AN} = \frac{1}{\frac{a_{11} + a_{11'}}{2} - \frac{a_{12} + a_{13} + a_{23}}{3}}$$

entonces:

$$C_{AN} = \frac{2\pi\epsilon_o l}{\ln \frac{\sqrt[3]{D_{12}D_{13}D_{23}}}{\sqrt{Rd}}} [F] \quad (5.51)$$

Si se utiliza la Ec. (5.31) y se define:

$$D_S \triangleq \sqrt{Rd} \quad (5.52)$$

$$C'_{AN} = \frac{0,0388}{\log \frac{D_{eq}}{D_S}} \left[\frac{\mu F}{milla} \right] \quad (5.53)$$

Note la analogía de las ecuaciones que expresan la capacitancia de las líneas aéreas de transmisión de energía eléctrica.

5.9. Líneas trifásicas de circuitos paralelos.

Una línea transpuesta de circuitos paralelos, se muestra en la Fig. 5.18. Se puede escribir la ecuación para la tensión en la superficie del conductor A , si se utiliza la Ec. (5.19). Los conductores de cualquier agrupación están en paralelo. Se debe tener presente que:

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{22} = a_{33} = a_{1'1'} = a_{2'2'} = a_{3'3'} \\ a_{12} &= a_{1'2'} = a_{21} = a_{2'1'} = a_{23} = a_{2'3'} = a_{32} = a_{3'2'} \\ a_{13} &= a_{1'3'} = a_{31} = a_{3'1'} \\ a_{11'} &= a_{1'1} = a_{33'} = a_{3'3} \\ a_{12'} &= a_{1'2} = a_{21'} = a_{2'1} = a_{23'} = a_{2'3} = a_{32'} = a_{3'2} \\ a_{13'} &= a_{1'3} = a_{31'} = a_{3'1} \\ a_{22'} &= a_{2'2} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{vmatrix} V_{Ai} \\ V_{Bi} \\ V_{Ci} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + a_{11'} & a_{12} + a_{12'} & a_{13} + a_{13'} \\ a_{21} + a_{21'} & a_{22} + a_{22'} & a_{23} + a_{23'} \\ a_{31} + a_{31'} & a_{32} + a_{32'} & a_{33} + a_{33'} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{Q_a}{2} \\ \frac{Q_b}{2} \\ \frac{Q_c}{2} \end{vmatrix}$$

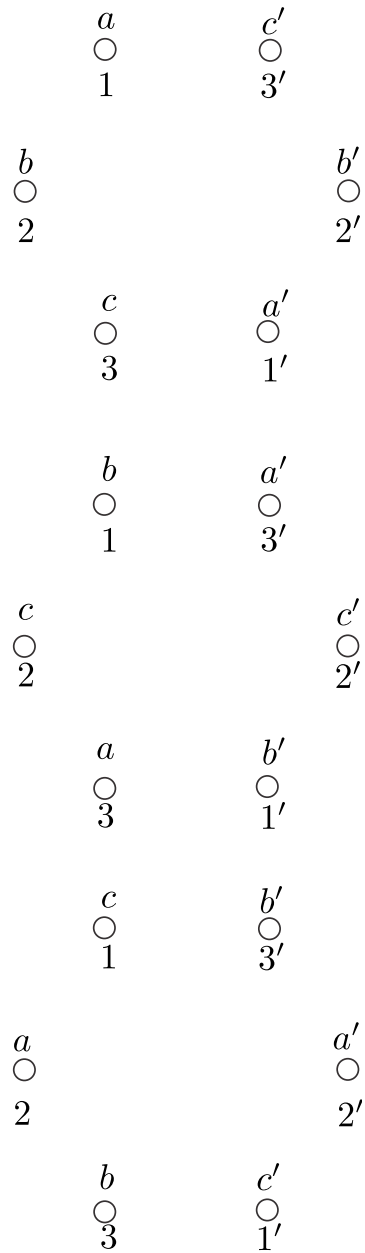


Figura 5.18 Sección transversal de una línea trifásica de circuitos paralelos.

$$\begin{vmatrix} V_{Aj} \\ V_{Bj} \\ V_{Cj} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + a_{33'} & a_{11'} + a_{33'} & a_{12} + a_{32'} \\ a_{13} + a_{13'} & a_{11} + a_{11'} & a_{12} + a_{12'} \\ a_{23} + a_{23'} & a_{21} + a_{21'} & a_{22} + a_{22'} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{Q_a}{2} \\ \frac{Q_b}{2} \\ \frac{Q_c}{2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} V_{Ak} \\ V_{Bk} \\ V_{Ck} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} + a_{22'} & a_{23} + a_{23'} & a_{21} + a_{21'} \\ a_{32} + a_{32'} & a_{33} + a_{33'} & a_{31} + a_{31'} \\ a_{12} + a_{12'} & a_{13} + a_{13'} & a_{11} + a_{11'} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{Q_a}{2} \\ \frac{Q_b}{2} \\ \frac{Q_c}{2} \end{vmatrix}$$

Se encuentra $|V_{AN} + V_{NB}| = \frac{1}{3} ||V_{Ai} - V_{Bi}| + |V_{Aj} - V_{Bj}| + |V_{Ak} - V_{Bk}||$

$$|V_{AN} + V_{NB}| = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} D & -D & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{Q_a}{2} \\ \frac{Q_b}{2} \\ \frac{Q_c}{2} \end{vmatrix} \quad (5.54)$$

Donde $D = 3a_{11} + 2(a_{11'} - a_{12} - a_{12'}) - a_{13} - a_{13'} + a_{22'}$

Se obtiene: $|V_{AN} + V_{NC}| = \frac{1}{3} ||V_{Ai} - V_{Ci}| + |V_{Aj} - V_{Cj}| + |V_{Ak} - V_{Ck}||$

$$|V_{AN} + V_{NC}| = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} D & 0 & -D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{Q_a}{2} \\ \frac{Q_b}{2} \\ \frac{Q_c}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \quad (5.55)$$

Si se suman las Ecs. (5.54) y (5.55), se obtiene:

$$|3V_{AN}| = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 2D & -D & -D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{Q_a}{2} \\ \frac{Q_b}{2} \\ \frac{Q_c}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 2D & -D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{Q_a}{2} \\ \frac{Q_b}{2} + \frac{Q_c}{2} \end{vmatrix}$$

$$C_{AN} = \frac{Q_A}{V_{AN}} = \frac{6}{D} = \frac{1}{\frac{D}{6}}$$

$$C_{AN} = \frac{1}{\frac{1}{6} [3a_{11} + 2a_{11'} - 2(a_{12} + a_{12'}) - (a_{13} + a_{13'}) + a_{22'}]}$$

$$C_{AN} = \frac{2\pi\epsilon_o l}{\ln \frac{\sqrt[6]{(D_{12}D_{12'})^2 D_{13}D_{13'}}}{\sqrt[6]{R^3 D_{11'}^2 D_{22'}}}} [F] \quad (5.56)$$

Se define:

$$D_{eq} \triangleq \sqrt[6]{(D_{12}D_{12'})^2 D_{13}D_{13'}} \quad (5.57)$$

$$D_S \triangleq \sqrt[6]{R^3 D_{11'}^2 D_{22'}} \quad (5.58)$$

Si se remplazan las Ecs.(5.57) y (5.58) en la Ec. (5.56), se obtiene:

$$C'_{AN} = \frac{0,0388}{\log \frac{D_{eq}}{D_S}} \left[\frac{\mu F}{milla} \right] \quad (5.59)$$

De nuevo se nota la analogía de las ecuaciones que expresan la capacitancia de las líneas aéreas de transmisión de energía eléctrica.

5.10. Ejemplos.

Ejemplo 16.

Hallar la capacitancia del capacitor de placas paralelas que contiene dos dieléctricos de constantes dieléctricas k_1 y k_2 , tal como se muestra en la Fig. 5.19.

SOLUCIÓN

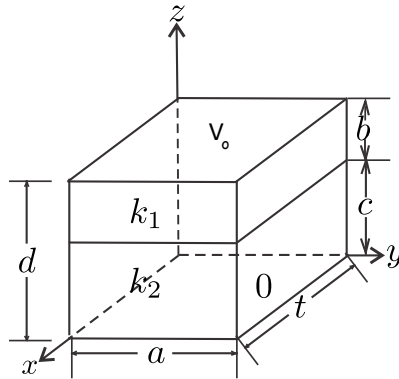


Figura 5.19 Ejemplo 1.

La solución a la ecuación de Laplace del potencial en los medios 1 y 2 es:

$$V_1 = A_1 z + B_1 \quad 0 \leq z \leq t \quad (5.60)$$

$$V_2 = A_2 z + B_2 \quad t \leq z \leq t + d \quad (5.61)$$

a. $z = 0 \quad V = 0$

$$0 = A_1 \cdot 0 + B_1 \quad B_1 = 0$$

$$V_1 = A_1 z$$

b. $z = t + d \quad V_2 = V_0$

$$V_0 = A_2 (t + d) + B_2 \quad B_2 = V_0 - A_2 (t + d)$$

Si el valor anterior se sustituye en la Ec. (5.61):

$$V_2 = V_0 + A_2 [z - (t + d)]$$

$$\begin{aligned} \text{c.} \quad z = t \quad V_1 &= V_2 \\ V_1 &= A_1 t \quad V_2 = V_o - A_2 d \end{aligned}$$

$$A_1 t = V_o - A_2 d \quad (5.62)$$

d. El campo eléctrico se obtiene a partir del gradiente negativo del potencial escalar eléctrico:

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &= A_1 \quad \frac{dV_2}{dt} = A_2 \\ \mathbb{E}_1 &= -A_1 \vec{a}_z \quad \mathbb{D}_1 = -\varepsilon_o k_1 A_1 \vec{a}_z \\ \mathbb{E}_2 &= -A_2 \vec{a}_z \quad \mathbb{D}_2 = -\varepsilon_o k_2 A_2 \vec{a}_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e.} \quad z = t \quad (\mathbb{D}_2 - \mathbb{D}_1) \cdot \vec{a}_z &= 0 \\ (-\varepsilon_o k_2 A_2 \vec{a}_z + \varepsilon_o k_1 A_1 \vec{a}_z) \cdot \vec{a}_z &= 0 \end{aligned}$$

$$A_1 = \frac{k_2}{k_1} A_2 \quad (5.63)$$

Si la Ecs. (5.63) se remplaza en la Ecs. (5.62), se obtiene:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{V_o}{t + \frac{k_1}{k_2} d} \quad A_2 = \frac{V_o}{d + \frac{k_2}{k_1} t} \\ \text{f.} \quad z = t + d \quad \mathbb{D}_2 &= \frac{-\varepsilon_o k_2 V_o}{d + \frac{k_2}{k_1} t} \vec{a}_z \end{aligned}$$

$$\sigma = \mathbb{D}_2 \cdot (-\vec{a}_z) = \frac{\varepsilon_o k_2 V_o}{d + \frac{k_2}{k_1} t} \quad Q = \sigma S = \frac{\varepsilon_o k_2 V_o S}{d + \frac{k_2}{k_1} t}$$

Por lo tanto:

$$C = \frac{Q}{V_o} = \frac{\varepsilon_o k_2 S}{d + \frac{k_2}{k_1} t}$$

□

EJEMPLO 2

Hallar la capacitancia del capacitor de placas paralelas que contiene dos dieléctricos de constantes dieléctricas k_1 y k_2 , tal como se muestra en la Fig. 5.20.

SOLUCIÓN

$$V_1 = A_1 z + B_1 \quad 0 \leq z \leq d \quad (5.64)$$

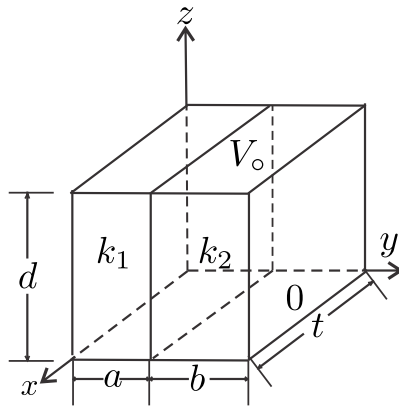


Figura 5.20 Ejemplo 2.

$$V_2 = A_2 z + B_2 \quad 0 \leq z \leq d \quad (5.65)$$

a. $z = 0 \quad V_1 = V_2 = 0$

$$0 = A_2 \cdot 0 + B_2 \quad B_2 = 0$$

$$V_1 = A_1 z \quad V_2 = A_2 z$$

b. $z = d \quad V_1 = V_0 \quad V_2 = V_0$

$$A_1 = A_2 = \frac{V_0}{d} \quad (5.66)$$

Si la Ec. (5.66) se sustituye en las Ecs. (5.64) y (5.65):

$$V_1 = \frac{V_0}{d} z \quad V_2 = \frac{V_0}{d} z$$

c. El campo eléctrico se obtiene a partir del gradiente negativo del potencial escalar eléctrico:

$$\mathbb{E}_1 = -\frac{V_o}{d}\vec{a}_z \quad \mathbb{D}_1 = -\frac{\varepsilon_o k_1 V_o}{d}\vec{a}_z$$

$$\mathbb{E}_2 = -\frac{V_o}{d}\vec{a}_z \quad \mathbb{D}_2 = -\frac{\varepsilon_o k_2 V_o}{d}\vec{a}_z$$

$$\text{d.} \quad z = d \quad \sigma_1 = \mathbb{D}_1 \cdot (-\vec{a}_z) = \frac{\varepsilon_o k_1 V_o}{d}$$

$$\text{e.} \quad z = d \quad \sigma_2 = \mathbb{D}_2 \cdot (-\vec{a}_z) = \frac{\varepsilon_o k_2 V_o}{d}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = \sigma_1 S + \sigma_2 S = \frac{\varepsilon_o (k_1 + k_2) V_o S}{d}$$

Por lo tanto:

$$C = \frac{Q}{V_o} = \frac{\varepsilon_o (k_1 + k_2) S}{d}$$

□

EJEMPLO 3

En coordenadas cilíndricas dos planos conductores muy grandes están situados en $\varphi = 0$ y $\varphi = \alpha$; y sometidos a una diferencia de potencial V_o como se muestra en la Fig. 5.21. Despreciar el efecto de dispersión para hallar la capacitancia por unidad de longitud del sistema, si el espacio entre los conductores tiene constante dieléctrica k .

SOLUCIÓN

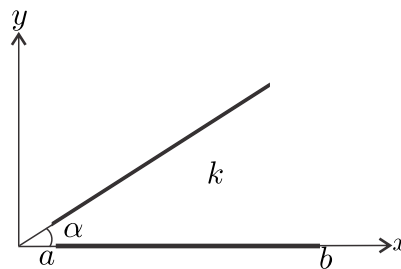


Figura 5.21 Ejemplo 3.

La solución a la ecuación de Laplace del potencial en la región solicitada es:

$$V = A\varphi + B \quad 0 \leq \varphi \leq \alpha \quad (5.67)$$

$$\begin{aligned} \text{a.} \quad \varphi &= 0 & V &= 0 \\ 0 &= A0 + B & B &= 0 \end{aligned}$$

$$V = A\varphi \quad (5.68)$$

$$\text{b.} \quad \varphi = \alpha \quad V = V_o$$

$$A = \frac{V_o}{\alpha} \quad (5.69)$$

Si la Ec. (5.69) se sustituye en la Ec. (5.68):

$$V = \frac{V_o}{\alpha} \varphi \quad (5.70)$$

c. El campo eléctrico se obtiene a partir del gradiente negativo del potencial escalar eléctrico:

$$\frac{dV}{d\varphi} = \frac{V_o}{\alpha} \quad \mathbb{E} = -\frac{V_o}{r\alpha} \vec{a}_\varphi \quad \mathbb{D} = -\frac{\varepsilon V_o}{r\alpha} \vec{a}_\varphi$$

$$\text{d.} \quad \varphi = \alpha \quad \sigma = \mathbb{D} \cdot (-\vec{a}_\varphi) = \frac{k\varepsilon_o V_o}{r\alpha}$$

$$\text{e.} \quad Q = \int_S \sigma dS = \frac{k\varepsilon_o V_o}{\alpha} \int_0^\ell dz \int_a^b \frac{dr}{r} \quad Q = \frac{k\varepsilon_o V_o \ell}{\alpha} \ln \frac{b}{a}$$

Por lo tanto:

$$C = \frac{Q}{V_o} = \frac{k\varepsilon_o \ell}{\alpha} \ln \frac{b}{a} \quad \square$$

EJEMPLO 4

Una esfera metálica aislada, de radio $a = 5 \text{ [cm]}$ se cubre uniformemente con un dieléctrico para el cual $k = 10$ en una capa de espesor b . La adición de otros 10 [cm] al espesor de la placa duplica la capacitancia. Hallar b .

SOLUCIÓN

De la Fig. 5.22:

$$r_1 = a + b \quad (5.71)$$

$$r_2 = 3a + b \quad (5.72)$$

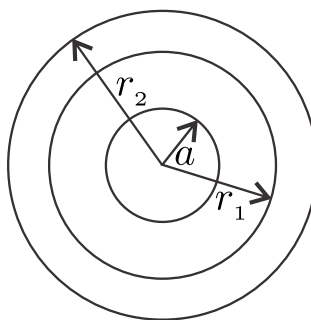


Figura 5.22 Ejemplo 4.

$$\text{i.} \quad a < r < r_1 \quad \mathbb{E}_1 = \frac{Q}{4\pi k \varepsilon_o r^2} \vec{a}_r$$

$$\text{ii.} \quad r > r_1 \quad \mathbb{E}_2 = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_o r^2} \vec{a}_r$$

$$\int_0^V dV = - \left[\int_{\infty}^{r_1} \mathbb{E}_2 \cdot \vec{dr} + \int_{r_1}^a \mathbb{E}_1 \cdot \vec{dr} \right]$$

$$V = -\frac{Q}{4\pi \varepsilon_o} \left[\int_{\infty}^{r_1} \frac{dr}{r^2} + \frac{1}{k} \int_{r_1}^a \frac{dr}{r^2} \right]$$

$$V = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_o} \left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{k} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r_1} \right) \right]$$

$$C_1 = \frac{4\pi \varepsilon_o}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{k} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r_1} \right)}$$

De modo similar:

$$C_2 = \frac{4\pi \varepsilon_o}{\frac{1}{r_2} + \frac{1}{k} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r_2} \right)}$$

De acuerdo a la condición exigida en el enunciado, se tiene $C_2 = 2C_1$. Entonces:

$$\frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{r_2} + \frac{1}{k\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r_2}\right)}} = \frac{8\pi\epsilon_0}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{k\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r_1}\right)}} \quad (5.73)$$

Luego de efectuar operaciones, reducir términos semejantes y remplazar los valores dados en las Ecs. (5.71) y (5.72), en la Ec. (5.73) se tiene:

$$b^2 + 13ab - 6a^2 = 0$$

La solución para b es:

$$b = \frac{-13a \pm \sqrt{169a^2 + 24a^2}}{2} = \frac{a(-13 \pm \sqrt{193})}{2}$$

La solución que satisface la condición requerida en el problema es:

$$b = \frac{a(-13 + \sqrt{193})}{2}$$

Si se remplace el valor de a :

$$b = 2,23 [cm] \quad \square$$

EJEMPLO 5

Un capacitor de placas paralelas tiene la región entre éstas llena de una plancha aislante de constante dieléctrica k . Las dimensiones de la placa son: anchura W , longitud l y separación entre ellas d . El capacitor se conecta a una fuente V_0 . La plancha de aislante se extrae parcialmente en la dirección longitudinal, hasta que queda solo una longitud y dentro de las placas, si se desprecia el efecto marginal, hallar:

- la capacitancia del sistema.
- la energía almacenada en el sistema.
- la fuerza con que atrae el capacitor el dieléctrico, si se considera V_0 constante.
- la fuerza con que atrae el capacitor el aislante, si se considera Q constante.

SOLUCIÓN

- La carga sobre la placa positiva es:

$$Q = \sigma_o (\ell - y) W + \sigma y W \quad (5.74)$$

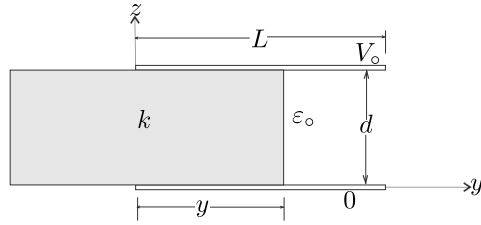


Figura 5.23 Ejemplo 5.

Donde σ y σ_o son las densidades superficiales de carga libre en el aislante y espacio libre respectivamente.

$$\sigma = D = \varepsilon E = \varepsilon \frac{V_o}{d} \quad (5.75)$$

$$\sigma_o = D_o = \varepsilon_o E_o = \varepsilon_o \frac{V_o}{d} \quad (5.76)$$

Ya que la componente tangencial del campo en la frontera es continua, se tiene:

$$E = E_o$$

Si las Ecs. (5.75) y (5.76) se remplazan en la Ec. (5.74):

$$Q = \frac{W V_o}{d} [\varepsilon_o (\ell - y) + \varepsilon y]$$

$$C = \frac{W}{d} [\varepsilon_o (\ell - y) + \varepsilon y] \quad \square$$

$$\text{b. } W_E = \frac{1}{2} V_o C^2 = \frac{W V_o^2}{2d} [\varepsilon_o (\ell - y) + \varepsilon y] \quad \square$$

$$F_E = \left. \frac{\partial W_E}{\partial y} \right|_{V_o=cte} = \frac{W V_o}{2d} (\varepsilon - \varepsilon_o) \quad \square$$

$$\text{c. } W_E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 d}{2W [\varepsilon_o (\ell - y) + \varepsilon y]} \quad \square$$

$$\left. \frac{\partial W_E}{\partial y} \right|_{Q=cte} = - \frac{Q^2 d (\varepsilon - \varepsilon_o)}{2W [\varepsilon_o (\ell - y) + \varepsilon y]^2} = - \frac{V_o^2 W (\varepsilon - \varepsilon_o)}{2d}$$

$$F_E = - \left. \frac{\partial W_E}{\partial y} \right|_{Q=cte} = \frac{V_o^2 W (\varepsilon - \varepsilon_o)}{2d}$$

□

EJEMPLO 6

Un circuito de una línea de transmisión monofásica está compuesta por tres conductores sólidos de $0,1[pulg]$ de radio. El circuito de retorno tiene dos conductores sólidos de $0,2[pulg]$ de radio. El arreglo se muestra en la Fig. 5.24. Hallar la capacitancia en cada circuito.

SOLUCIÓN

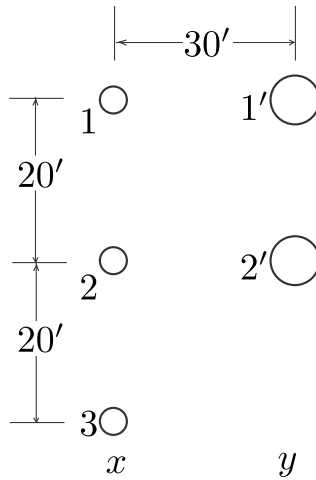


Figura 5.24 Ejemplo 6.

$$D_{12'} = D_{1'2} = D_{21'} = D_{2'1} = D_{2'3} = D_{32'} = 10\sqrt{13}$$

$$D_{12} = D_{21} = D_{23} = D_{32} = 20$$

$$D_{1'1} = D_{11'} = D_{2'2} = D_{22'} = 30$$

$$D_{11} = D_{22} = D_{33} = \frac{0,1}{12}$$

$$D_{13} = D_{31} = 40 \quad D_{1'3} = D_{3'1} = 50$$

$$D'_{1'1} = D'_{2'2} = \frac{0,2}{12} \quad D_{1'2'} = D_{2'1'} = 20$$

$$D_{Sx} = \sqrt[9]{\prod_{i=1}^3 \prod_{j=1}^3 D_{ij}} = \sqrt[9]{D_{11}^3 D_{14}^4 D_{13}^2}$$

$$D_{Sx} = \sqrt[9]{\left(\frac{0,1}{12}\right)^3 \times 20^4 \times 40^2} = 1,743$$

$$D_{Sy} = \sqrt[4]{\prod_{i=1'}^{2'} \prod_{j=1'}^{2'} D_{ij}} = \sqrt[4]{D_{1'1'}^2 D_{1'2'}^2} = \sqrt{D_{1'1'} D_{1'2'}}$$

$$D_{Sy} = \sqrt{\left(\frac{0,2}{12}\right) \times 20} = 0,5774$$

$$D_{eq} = \sqrt[6]{\prod_{i=1}^3 \prod_{j=1'}^{2'} D_{ij}} = \sqrt[6]{D_{11'}^2 D_{12'}^2 D_{31'}} = \sqrt[6]{30^2 \times (10\sqrt{13})^3 \times 50} = 35,81$$

$$C_x = \frac{0,0388}{\log \frac{35,81}{1,743}} = 2,956 \times 10^{-8} \left[\frac{F}{milla} \right] \quad \square$$

$$C_y = \frac{0,0388}{\log \frac{35,81}{0,5774}} = 2,165 \times 10^{-8} \left[\frac{F}{milla} \right] \quad \square$$

$$C_x + C_y = 5,121 \times 10^{-8} \left[\frac{F}{milla} \right] \quad \square$$

EJEMPLO 7

Hallar la reactancia capacitiva por milla de una línea monofásica que opera a $60[Hz]$. El conductor es Partridge y el espaciamiento es $20[pies]$ entre centros.

SOLUCIÓN

De la Tabla A.1 del texto "Elements of Power System Analysis" de William D. Stevenson, Jr., tercera edición, se toma el valor de R .

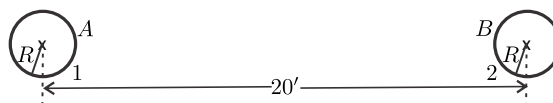


Figura 5.25 Ejemplo 7.

$$R = \frac{0,642}{2 \times 12} [pies]$$

$$C = \frac{0,0388}{\log \frac{D}{R}} = \frac{0,0388}{\log \frac{20 \times 24}{0,642}} 0,0135 \times 10^{-6} \left[\frac{F}{milla} \right]$$

$$X_c = \frac{1}{2\pi f C'} \quad b_c = \frac{1}{X_C} = 2\pi f C'$$

$$b_c = 2\pi \times 60 \times 0,0135 \times 10^{-6} \left[\frac{\text{v}}{milla} \right] = 5,09 \times 10^{-6} \left[\frac{\text{v}}{milla} \right]$$

□

5.11. Problemas.

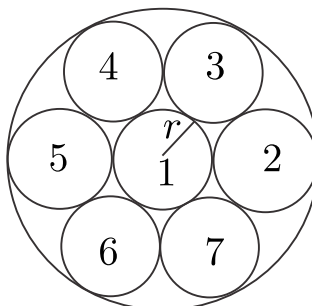


Figura 5.26 Problema 1.

1. Hallar D_S para el conductor mostrado en la Fig. 5.26.

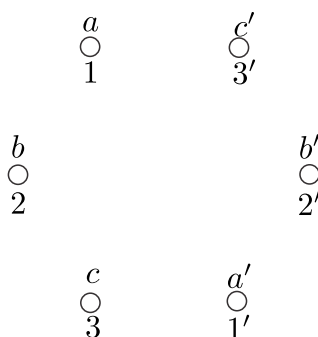


Figura 5.27 Problema 2.

2. Seis conductores *ACSR* Drake constituyen una línea trifásica de $60[Hz]$ de doble circuito, con la configuración mostrada en la Fig. 5.27. El espaciamento vertical es de $14[pies]$; la distancia horizontal más larga es de $32[pies]$ y las distancias horizontales más cortas son de $25[pies]$; Hallar la reactancia capacitiva con respecto al neutro en $[\Omega milla]$.
3. Una línea trifásica de $60[Hz]$ tiene sus conductores arreglados en una forma triangular de manera que dos de las distancias entre conductores son de $25[pies]$ y la tercera es de $42[pies]$. Los conductores son del tipo *ACSR* Osprey. Determinar la capacitancia con respecto al neutro en $[\frac{\mu F}{milla}]$. Hallar la capacitancia con respecto al neutro si la línea tiene $150[millas]$ de longitud.
4. Hallar una expresión para la capacitancia con respecto al neutro en $[\frac{F}{m}]$, de una línea monofásica si se tiene en cuenta el efecto de tierra. Utilizar la misma

nomenclatura empleada donde el efecto del suelo se representa por cargas imagen. Mediante la ecuación deducida, calcular la capacitancia con respecto al neutro en $\left[\frac{F}{m}\right]$ de una línea monofásica compuesta de dos conductores sólidos de sección circular, cada uno con un diámetro de $0,229[pulg]$. Los conductores están separados $10[pies]$ y se encuentran a $25[pies]$ por encima del suelo.

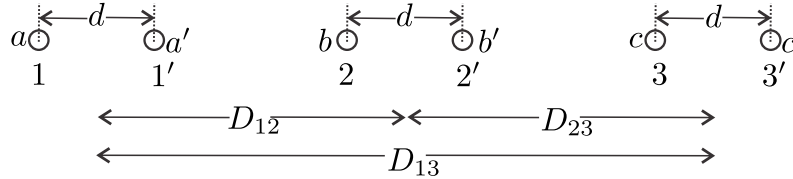


Figura 5.28 Problema 5.

5. Calcular la reactancia capacitiva en $[\Omega milla]$ de una línea trifásica a $60[Hz]$ con conductores agrupados, con tres conductores *ACSR* Rail por grupo y $45[cm]$ entre conductores. Los espaciamientos entre los centros de los agrupamientos son de 9, 9 y $18[m]$.

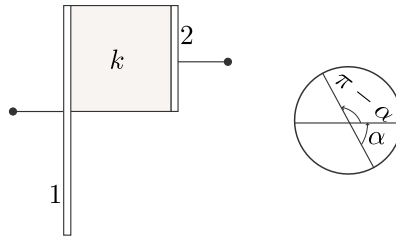


Figura 5.29 Problema 6.

6. Un capacitor está formado, de acuerdo a la Fig. 5.29, por una armadura (1) con forma de círculo completo y otra (2) con forma de semicírculo. El dieléctrico (3) interpuesto tiene también forma de semicírculo y $k = 6$. La $C_{Máx}$ de este dispositivo es de $30 \times 10^{-12} [F]$. ¿Qué ángulo α debe girarse el semicírculo para que la capacidad del capacitor así formado disminuya hasta un valor de $22 \times 10^{-12} [F]$?

Encontrar el tiempo necesario para que las placas (masa m_o por unidad de área de un capacitor plano - paralelo se reúnan al abandonarlas desde su separación x_o .

a. si las placas tienen una densidad de carga superficial σ , aislándolas a continuación.

b. si las placas se mantienen a potenciales constantes, siendo V_o su diferencia de potencial.

8. La permitividad relativa del dieléctrico que ocupa el espacio entre las placas de un capacitor plano paralelo, varia linealmente con la distancia. Si k_1 y k_2 , son los valores en las placas, $k_1 > k_2$, y la separación entre las placas es d , hallar la capacitancia por unidad de longitud.

6

CAPÍTULO SEIS

ELECTRODINÁMICA

Cuando la carga eléctrica se mueve surge el fenómeno de la electricidad. A propósito de la corriente eléctrica se consideran tres velocidades:

- velocidad térmica de los electrones que se agitan por entre el enrejado de los átomos: $v_T = 100 \left[\frac{Km}{h} \right]$.
- velocidad de traslación de la nube de electrones, o sea, la velocidad de las cargas a través de una sección recta dada: $10^{-4} < v_t < 1 \left[\frac{cm}{S} \right]$.
- velocidad de propagación de la perturbación, o sea, la longitud de un conductor entre cuyos extremos existe un retardo de un segundo en la puesta en marcha de la nube electrónica. $c = 3 \times 10^8 \left[\frac{cm}{S} \right]$.

La corriente eléctrica es el movimiento de los portadores de carga. Éstas son partículas discretas y, por lo tanto, se consideran valores medios de las magnitudes. Por convención, el sentido de la corriente es aquel en que se mueve el portador de carga positivo, sea, opuesto al de la carga negativa.

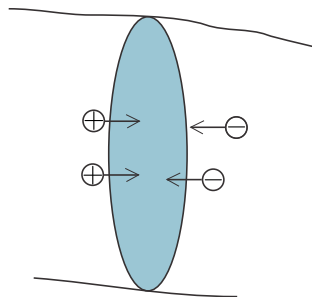


Figura 6.1 Diferencia entre carga neta y corriente.

La corriente es la velocidad a la que se transporta la carga por un punto dado en un conductor.

$$i = \frac{dQ}{dt} \left[A = \frac{C}{S} \right] \quad (6.1)$$

En la Fig. 6.1, la carga que atraviesa la sección transversal del conductor en un segundo es nula y la corriente de cuatro amperios hacia la derecha.

6.1. Clases de corriente.

6.2. I. Función del tiempo.

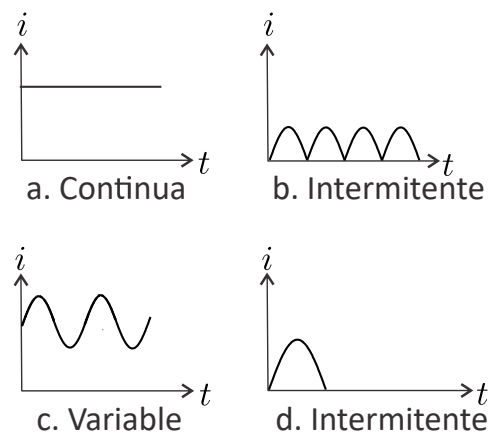


Figura 6.2 Ejemplos de corriente directa.

6.2.1. a. Corriente directa.

El flujo de cargas eléctricas es en el mismo sentido a lo largo de un hilo o elemento de corriente.

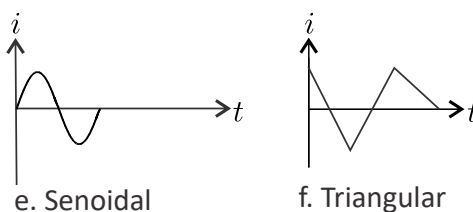


Figura 6.3 Ejemplos de corriente alterna.

6.2.2. b. Corriente alterna.

El flujo de cargas se alterna en un sentido y en el opuesto en tiempos relativamente cortos. La senoidal es el caso más importante.

6.3. II. Corriente de régimen transitorio.

Varían rápidamente y no siguen ninguna ley. Se estudian por anomalías y averías que pueden causar en los sistemas de potencia cuando ocurre una falla. Se interrumpen al poco tiempo: conexión y desconexión de circuitos, corrientes de corto circuito, etc.

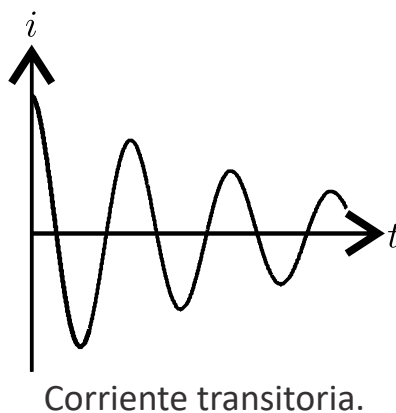


Figura 6.4 Corriente de régimen transitorio.

6.4. III. Función del medio.

Hace relación al medio en el cual ocurre el fenómeno de la electricidad: metales, semiconductores, vacío, gases, electrolitos, aislantes, frontera entre metales y semiconductores.

6.5. Densidad de corriente.

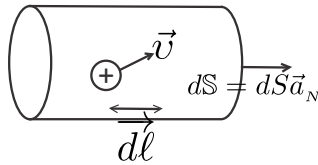


Figura 6.5 Conductor con una sola clase de portador de carga.

Se considera un medio conductor que tiene una sola clase de portador de carga. Si:

N : número de portadores de carga por unidad de volumen.

Q : carga de un portador.

$\vec{v}$: velocidad de arrastre o deriva o de la nube electrónica.

$d\tau = dS d\ell$: elemento de volumen.

Si se desprecia el movimiento térmico al azar se puede calcular la intensidad de corriente por un elemento de área dS tal como se muestra en la Fig. 6.5.

La carga dQ por unidad de volumen $d\tau$, está dada por:

$$\frac{dQ}{d\tau} = NQ \longrightarrow dQ = NdSd\ell$$

en el tiempo cada portador de carga recorre la distancia $d\ell$:

$$d\ell = \vec{v} \cdot \vec{a}_N dt$$

$$di = \frac{dQ}{dt} = NQ\vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (6.2)$$

De la Ec. (6.2), se define el vector densidad de corriente $\mathbb{J}$:

$$\mathbb{J} = NQ\vec{v} \left[\frac{A}{m^2} \right] \quad (6.3)$$

Si hay varias clases de portadores de carga, habrá una contribución de cada una de ellas. En general:

$$\mathbb{J} = \sum_i NQ\vec{v}_i \quad (6.4)$$

Por lo tanto, la Ec. (6.2) se reescribe como:

$$di = \mathbb{J} \cdot d\mathbb{S} \quad (6.5)$$

La Ec. (6.5) representa el elemento de corriente que atraviesa el elemento de área $d\mathbb{S}$. La corriente por la superficie S , está dada por:

$$i = \int_S \mathbb{J} \cdot d\mathbb{S} \quad (6.6)$$

6.6. Ecuación de continuidad o conservación de la carga.

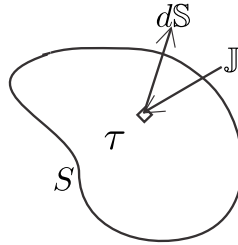


Figura 6.6 Densidad de corriente y densidad de carga volumétrica.

La densidad de corriente y la de carga volumétrica no son cantidades independientes, están relacionadas en cada punto por una ecuación diferencial, llamada ecuación de continuidad y tiene su origen en el principio de conservación de la carga. Se deduce al aplicar la Ec. (6.5) a una superficie S que encierra el volumen τ . La corriente que entra al volumen, está dada por:

$$i = - \oint_S \mathbb{J} \cdot d\mathbb{S} = - \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbb{J} d\tau \quad (6.7)$$

En la Ec. (6.7), el signo negativo se debe a que $\vec{a}_N$ es la normal que se aleja del volumen τ y se desea que $i > 0$ cuando el flujo neto de carga va del exterior al interior del volumen. Pero, de la Ec. (6.1):

$$i = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho d\tau = \int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau \quad (6.8)$$

Ya que se considera un volumen fijo, la derivada respecto al tiempo opera sólo sobre la densidad de carga volumétrica. ρ es función de la posición y del tiempo, de modo que la derivada con respecto al tiempo se convierte en parcial cuando se introduce en la integral.

Si las Ecs. (6.7) y (6.8) se igualan, se obtiene la Ec. (6.9). Para que ésta sea válida para cualquier volumen del medio es preciso que el integrando se anule en cada punto.

$$\int_{\tau} \left(\nabla \cdot \mathbb{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) d\tau = 0 \quad (6.9)$$

Así:

$$\nabla \cdot \mathbb{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (6.10)$$

Si $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, la carga no se acumula en ninguna parte, entonces

$$\nabla \cdot \mathbb{J} = 0 \quad (6.11)$$

$\mathbb{J}$ es un campo solenoidal y se llama densidad de corriente estacionaria.

Si $\Delta\tau \rightarrow 0$:

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \mathbb{J} d\tau = \oint_S \mathbb{J} \cdot d\mathbb{S} = \sum_k i_k = 0 \quad (6.12)$$

La suma de corrientes en un nodo es cero, es la Primera Ley de Kirchhoff, una consecuencia del hecho de que la carga no se acumula en ningún nodo del circuito como resultado de la corriente estacionaria.

6.7. Ley de Ohm.

Si un conductor está en equilibrio electrostático el campo eléctrico en el interior del conductor es cero. Cuando se trata de cargas en movimiento, en el interior del conductor puede existir un campo eléctrico.

La mayoría de los metales son de estructura cristalina, o sea, una unidad estructural fundamental constituida por átomos o moléculas, estrictamente iones, que se repite tridimensionalmente. En un metal, los electrones de valencia no están ligados a un átomo individual sin embargo se mueven dentro de la red y se llaman de conducción. En ausencia de un campo eléctrico se mueven al azar, como las moléculas de un gas encerrado en un recipiente. Los electrones chocan constantemente con los arreglos de los átomos y sufren cambios en la velocidad. Los choques electrón-cristal se describen mediante la trayectoria libre media λ , siendo ésta la distancia media que recorre un electrón entre choques consecutivos. No existe corriente en el conductor en ausencia de un campo eléctrico ya que la velocidad promedio de los electrones es cero, o sea, no existe desplazamiento neto después de varias colisiones. Si se aplica un campo eléctrico al metal, los electrones libres, además del movimiento térmico descrito antes modifican su movimiento irregular de modo que son arrastrados lentamente en dirección opuesta al campo, con una velocidad de arrastre $v \ll v_T$. Los electrones libres se mueven en el metal por entre la estructura cristalina del propio conductor. Estos electrones chocan con los arreglos de átomos y entre ellos mismos. En cada choque su velocidad cambia. Entre choque y choque el campo eléctrico acelera el electrón y éste alcanza rápidamente una velocidad promedio constante y así una aceleración cero o una fuerza neta igual a cero y durante el choque sufre un cambio brusco. La fuerza eléctrica en dirección del movimiento es cero, ya que existe otra en sentido contrario al movimiento. Son estos choques los que constituyen el origen de la fuerza opuesta al movimiento. Lo que interesa es el efecto de este promedio.

Se puede calcular la velocidad de arrastre en función de la térmica, la trayectoria libre media y el campo eléctrico. Las consideraciones a tener en cuenta son:

- a. los electrones tienen la misma velocidad.
- b. los electrones tienen la misma trayectoria media.
- c. los movimientos antes y después del choque son independientes, el movimiento

se suspende debido a la colisión.

$$\mathbb{F}_{prom} = \frac{1}{t_o} \int_{t_o} \mathbb{F} dt$$

$$\mathbb{F}_{prom} = \frac{1}{t_o} \left[\int_{t_o-t} \mathbb{F} dt + \int_t \mathbb{F} dt \right] \rightarrow \mathbb{F}_{prom} = \frac{1}{t_o} \int_t \mathbb{F} dt$$

$$\mathbb{E}e + \frac{1}{t_o} \int_t \mathbb{F} dt = 0$$

De la segunda ley de Newton:

$$\int_t \mathbb{F} dt = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} m d\vec{v} = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = -m\vec{v}_1$$

donde:

m: masa del electrón.

t_o : tiempo medio durante los choques.

$\mathbb{F}_{prom}$: fuerza promedia sobre un electrón libre debida a los iones y demás electrones libres.

$\vec{v}_1$: velocidad promedia del electrón.

$\vec{v}_2$: velocidad después del choque.

$$\vec{v}_2 = 0$$

$$\mathbb{E}e = \frac{m\vec{v}_1}{t_o}$$

$$\text{pero } t_o = \frac{\lambda}{v_T}$$

$$Ee = \frac{mv_1 v_T}{\lambda} \rightarrow v_1 = \frac{Ee\lambda}{mv_T}$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} = \frac{e\lambda}{2mv_T} \mathbb{E}$$

$$\mathbb{J} = \frac{Ne^2\lambda}{2mv_T} \mathbb{E} \left[\frac{A}{m^2} \right] \quad (6.13)$$

De la Ec. (6.13), se tiene:

$$\mathbf{g} \triangleq \frac{Ne^2\lambda}{2mv_T} \left[\frac{\mathcal{U}}{m} \right] \quad (6.14)$$

$$\eta = \frac{1}{g} = \frac{2mv_T}{Ne^2\lambda} [\Omega m] \quad (6.15)$$

donde:

g : conductividad del material, depende de la temperatura ya que λ y v_T dependen de ella.

η : resistividad del material.

v_T : velocidad promedio de agitación térmica de los electrones.

N : número de portadores de carga por unidad de volumen.

λ : trayectoria libre media de los electrones en su agitación entre los retículos de los átomos.

Por lo tanto:

$$\mathbb{J} = g\mathbb{E} \quad (6.16)$$

La conductividad es proporcional al número de portadores de carga por unidad de volumen e inversamente proporcional a la velocidad térmica, de modo que cuando sea menor el efecto de las colisiones, mayor será la corriente para un campo eléctrico y viceversa. También, es proporcional al cuadrado de la carga, o sea, es independiente de la naturaleza de la carga. Para varios metales la resistividad es cero a una temperatura cercana al cero absoluto y esta propiedad se conoce como la superconductividad.

6.8. Tiempo de relajación.

Es una medida de qué tan rápido un material tiende al equilibrio electrostático. Se estudiará cómo una carga que se introduce a un material conductor, llega a la superficie como una carga superficial. Esto no ocurre comúnmente, pero ayuda a conocer adicionalmente a un conductor.

En $t = 0$ $\rho = \rho_o$

$$\mathbb{J} = g \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \mathbb{E} = \frac{g}{\varepsilon} \mathbb{D} \quad (6.17)$$

Si se remplace la Ec. (6.17) en la Ec. (6.10):

$$\frac{\mathbf{g}}{\varepsilon} \nabla \cdot \mathbb{D} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \rightarrow \frac{\mathbf{g}}{\varepsilon} \rho = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \rightarrow \ln \rho = -\frac{\mathbf{g}}{\varepsilon} t + k$$

De acuerdo a las condiciones iniciales: $\ln \frac{\rho}{\rho_o} = -\frac{\mathbf{g}}{\varepsilon} t$

$$\rho = \rho_o e^{-\frac{\mathbf{g}}{\varepsilon} t} \quad (6.18)$$

$$\tau \triangleq \frac{\varepsilon}{\mathbf{g}} \quad (6.19)$$

τ : tiempo de relajación.

La Ec. (6.18) expresa que se llega al estado de equilibrio exponencialmente. Es el tiempo que se necesita para que la carga de una región dada disminuya a $\frac{1}{\varepsilon}$ veces su valor inicial.

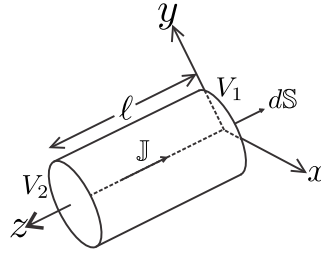


Figura 6.7 Resistencia de un conductor.

La Fig. 6.7 representa un cilindro conductor de sección transversal S , longitud ℓ , las superficies S_1 y S_2 ; se encuentran a potenciales V_1 y V_2 respectivamente y la diferencia de potencial es V_o siendo $V_1 > V_2$ y la corriente fluye normal a las superficies.

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\vec{\ell} \rightarrow \int_{V_1}^{V_2} dV = - \int_0^\ell E(\vec{a}_z) \cdot d\ell (-\vec{a}_z)$$

$$V_o = V_1 - V_2 = -E\ell \quad (6.20)$$

Para $z = \ell$:

$$i = \int_S J(-\vec{a}_z) \cdot dS \vec{a}_z = -JS \quad (6.21)$$

Si las Ecs. (6.20) y (6.21) se dividen miembro a miembro:

$$\frac{V_1 - V_2}{i} = \frac{-E\ell}{-JS} = \frac{E\ell}{gES} = \frac{\ell}{gS}$$

$$R = \frac{V_1 - V_2}{i} \quad (6.22)$$

$$R \triangleq \frac{\ell}{gS} \quad (6.23)$$

$$G \triangleq \frac{gS}{\ell} \quad (6.24)$$

$$V_o = IR \quad (6.25)$$

R : resistencia del conductor.

G : conductancia del conductor.

$$RG = 1$$

La resistencia del conductor depende de la geometría y de la naturaleza del material. La conductancia es el inverso de la resistencia. La Ec. (6.25) es la forma familiar de la ley de Ohm.

6.9. Campo no conservativo.

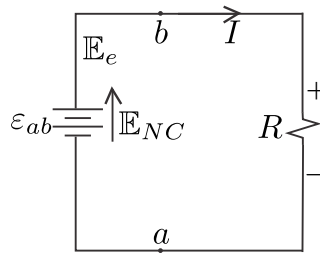


Figura 6.8 Campo electrostático y campo no conservativo.

Una corriente estacionaria no se mantiene mediante un campo electrostático $\mathbb{E}_e$. Para que una corriente circule es necesario tener un campo no conservativo $\mathbb{E}_{NC}$ además del electrostático. De la teoría del campo electrostático, se tiene:

$$\oint_C \mathbb{E}_e \cdot d\vec{\ell} = 0 \rightarrow \oint_C g\mathbb{E}_e \cdot d\vec{\ell} = \oint_C \mathbb{J} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Entonces $\mathbb{J} = 0$.

La expresión anterior, establece que una corriente estacionaria no se mantiene por fuerzas puramente electrostáticas.

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}_e + \mathbb{E}_{NC} \rightarrow \mathbb{E}_e = -\nabla V$$

$$\int_a^b \mathbb{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b \mathbb{E}_e \cdot d\vec{\ell} + \int_a^b \mathbb{E}_{NC} \cdot d\vec{\ell} \quad (6.26)$$

Se obtuvo que:

$$\int_a^b \mathbb{E}_e \cdot d\vec{\ell} = - \int_{V_a}^{V_b} dV = V_a - V_b \quad (6.27)$$

Se define:

$$\varepsilon_{ab} \triangleq \int_a^b \mathbb{E}_{NC} \cdot d\vec{\ell} \quad (6.28)$$

La caída de potencial a través de la resistencia es:

$$\int_a^b \mathbb{E}_e \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{g} \int_a^b g\mathbb{E}_e \cdot d\vec{\ell} = \frac{J\ell}{g} = i \frac{\ell}{gS} \quad (6.29)$$

$$\int_a^b \mathbb{E}_e \cdot d\vec{\ell} = IR \quad (6.30)$$

$$IR = V_a - V_b + \varepsilon_{ab}$$

$$V_b - V_a = \varepsilon_{ab} - IR \quad (6.31)$$

Si se analiza la Ec. (6.31), se tienen los siguientes casos:

- ε_{ab} : el elemento situado entre los puntos a y b se llama pasivo.
- $\varepsilon_{ab} \neq 0$: el elemento situado entre a y b se llama asiento de fuerza electromotriz o f.e.m.
- $V_a = V_b \rightarrow \varepsilon_{ab} = iR$: la corriente que circula entre a y b depende de la resistencia del alambre que une los bornes de la batería.

d. $i = 0 \rightarrow V_a - V_b = \varepsilon_{ab}$: el campo no conservativo de la batería anula el campo electrostático en ella.

El campo no conservativo es nulo fuera de la batería y sólo existe campo conservativo, el cual se obtiene a partir del gradiente negativo del potencial.

Si la Ec. (6.26) se integra en una trayectoria cerrada:

$$\sum iR = \sum \varepsilon \quad (6.32)$$

La Ec. (6.32) se conoce como la segunda ley de Kirchhoff. Es una consecuencia de la Conservación de la Energía.

6.10. Ley de Joule.

En la Fig. 6.7 si V_o es la diferencia de potencial a través del conductor, el trabajo para trasladar una carga Q entre estos puntos es $W = VQ$. En un tiempo dt a través de la sección transversal se desplaza una carga $dQ = Idt$ y el trabajo realizado es:

$$dW = VdQ + QdV \quad dW = VIdt$$

$$P = \frac{dW}{dt} = VI[W] \quad (6.33)$$

La Ec. (6.33) se conoce como la ley de Joule. El trabajo realizado por el campo al mover los electrones a través del conductor se disipa en calor, o sea, se transfiere energía del movimiento ordenado del electrón al desordenado del ión constituyente del cristal.

Si la Ley de Ohm se remplacea en la Ec. (6.33), se obtiene:

$$P = I^2 R \quad (6.34)$$

De la Fig. 6.7, si se considera un elemento de volumen del conductor, la potencia disipada en él es:

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\vec{\ell} \quad dV = -E(-\vec{a}_z) \cdot d\ell(-\vec{a}_z) = -E d\ell$$

$$dI = J(-\vec{a}_z) \cdot dS\vec{a}_z = -J dS \quad dP = dV di$$

$$\frac{dP}{d\tau} = \mathbb{E} \cdot \mathbb{J} \left[\frac{W}{m^3} \right] \quad (6.35)$$

La Ec. (6.35) se conoce como la densidad de potencia.

Estas deducciones las confirmó el físico inglés Joule experimentalmente al medir con un calorímetro la energía electrocinética que se transforma en calor.

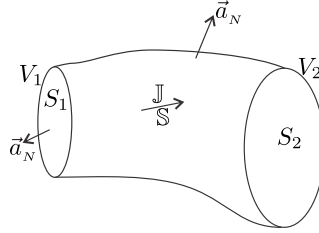


Figura 6.9 Resistor arbitrario.

La Fig. 6.9 ilustra un conductor con superficies S_1 y S_2 a potenciales V_1 y V_2 constantes. La corriente fluye normal a las superficies y paralela a los lados del conductor. De la Ec. (6.34), se tiene:

$$P = I^2 R = \int_{\tau} \mathbb{J} \cdot \mathbb{E} d\tau \rightarrow R = \frac{\int_{\tau} \mathbb{J} \cdot \mathbb{E} d\tau}{i^2}$$

Pero $\mathbb{E} = -\nabla V$, entonces: $R = -\frac{\int_{\tau} \mathbb{J} \cdot \nabla V d\tau}{i^2}$

Se utiliza la siguiente identidad vectorial, para sustituir el numerador de la expresión anterior:

$$\nabla \cdot V\mathbb{P} = \nabla V \cdot \mathbb{P} + V\nabla \cdot \mathbb{P} \rightarrow \nabla V \cdot \mathbb{P} = \nabla \cdot V\mathbb{P} - V\nabla \cdot \mathbb{P}$$

Por lo tanto:

$$R = -\frac{\int_{\tau} (\nabla \cdot V\mathbb{J} - V\nabla \cdot \mathbb{J}) d\tau}{I^2}$$

Para una densidad de corriente estacionaria $\nabla \cdot \mathbb{J} = 0$, entonces:

$$R = -\frac{\int_{\tau} \nabla \cdot V\mathbb{J} d\tau}{I^2} \quad (6.36)$$

La superficie que limita al volumen es:

$$S_T = S_1 + S_2 + S$$

Si se utiliza el teorema de Gauss para el numerador de la Ec. (6.36):

$$R = - \frac{\oint_{S_T} V \mathbb{J} \cdot d\mathbb{S}}{I^2}$$

$$R = - \frac{\int_{S_1} V_1 \mathbb{J}_1 \cdot dS \vec{a}_N + \int_{S_2} V_2 \mathbb{J}_2 \cdot dS (-\vec{a}_N) + \int_S V_2 \mathbb{J} \cdot dS \vec{a}_{N1}}{I^2}$$

$\int_S V_2 \mathbb{J} \cdot dS \vec{a}_{N1} = 0$, porque $\vec{a}_{N1}$ es normal a $\mathbb{J}$. En consecuencia, se tiene:

$$R = - \frac{V_1 \int_{S_1} \mathbb{J}_1 \cdot dS \vec{a}_N - V_2 \int_{S_2} \mathbb{J}_2 \cdot dS \vec{a}_N}{I^2} = - \frac{V_2 I - V_1 I}{I^2}$$

$$R = \frac{V_1 - V_2}{I} \quad (6.37)$$

6.11. Cálculo de la resistencia de conductores de forma arbitraria.

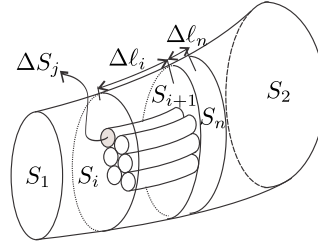


Figura 6.10 Cálculo de la resistencia.

En la Fig. 6.10 se muestra un conductor y dos superficies equipotenciales S_i y S_{i+1} . El volumen entre éstas se descompone en tubos de flujo elementales de longitud $\Delta \ell_i$, y sección transversal ΔS_j . De la Ec. (6.23) la resistencia de un tubo es $r_j = \frac{\Delta \ell_i}{g \Delta S_j}$, la conductancia del tubo es $g_j = \frac{g \Delta S_j}{\Delta \ell_i}$.

Los tubos de flujo están en paralelo entre estas superficies y por lo tanto sus conductancias se suman, la conductancia total entre las superficies S_i y S_{i+i} es:

$$\Delta g_j = \sum_j \frac{g \Delta S_j}{\Delta \ell_i}$$

y la resistencia total entre las superficies S_i y S_{i+i} :

$$\Delta r_i = \frac{1}{\sum_j \frac{g \Delta S_j}{\Delta \ell_i}}$$

$\Delta \ell_i$ varía ya que el espacio entre las superficies equipotenciales no es necesariamente uniforme. Si dividimos el conductor en N secciones, la expresión anterior es la resistencia de la i -ésima sección. La resistencia total es la combinación serie de todas las Δr_i y es:

$$R = \sum_i \frac{1}{\sum_j \frac{g \Delta S_j}{\Delta \ell_i}}$$

Y, en general:

$$R = \int_C \frac{1}{\int_S \frac{g \Delta S_j}{\Delta \ell_i}} \quad (6.38)$$

C : trayectoria a lo largo de la cual se mueve la carga.

S : superficie normal a la dirección en la cual se mueve la carga.

6.12. Condiciones de frontera y refracción de las líneas de corriente.

a. La Fig. 6.11 muestra la frontera entre dos medios de conductividades diferentes. Para corrientes estacionarias:

$$\oint_S \mathbb{J} \cdot d\mathbb{S} = \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} \mathbb{J} \cdot d\mathbb{S} = 0$$

$$\int_{S_1} \mathbb{J}_1 \cdot dS (-\vec{a}_N) + \int_{S_2} \mathbb{J}_2 \cdot dS \vec{a}_N + \int_{S_3} \mathbb{J} \cdot d\mathbb{S} = 0$$

Ya que $S_1 = S_2 = S$ y $\Delta h \rightarrow 0$:

$$\int_S (\mathbb{J}_2 - \mathbb{J}_1) \cdot dS \vec{a}_N = 0$$

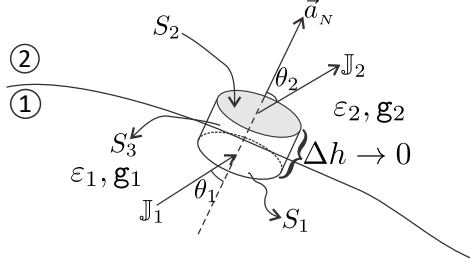


Figura 6.11 Condiciones de frontera.

$$\mathbb{J}_1 \cdot \vec{a}_N = \mathbb{J}_2 \cdot \vec{a}_N$$

$$J_{1N} = J_{2N} \quad (6.39)$$

La Ec. (6.39), expresa que la componente normal de la densidad de corriente es continua en la frontera, en la superficie de separación de los aislantes.

$$\text{b. } E_{1T} = E_{2T} \rightarrow \frac{\mathbf{g}_1}{\mathbf{g}_1} E_{1T} = \frac{\mathbf{g}_2}{\mathbf{g}_2} E_{2T}$$

$$\frac{J_{1T}}{J_{2T}} = \frac{\mathbf{g}_1}{\mathbf{g}_2} \quad (6.40)$$

La Ec. (6.40), establece que la componente tangencial de la densidad de corriente es discontinua en la entrecara.

$$\text{c. } \sigma = (\mathbb{D}_2 - \mathbb{D}_1) \cdot \vec{a}_N \rightarrow \sigma = (\varepsilon_2 \mathbb{E}_2 - \varepsilon_1 \mathbb{E}_1) \cdot \vec{a}_N$$

$$\sigma = \left(\frac{\varepsilon_2}{\mathbf{g}_2} \mathbb{J}_2 - \frac{\varepsilon_1}{\mathbf{g}_1} \mathbb{J}_1 \right) \cdot \vec{a}_N \rightarrow \sigma = \left(\frac{\varepsilon_2}{\mathbf{g}_2} \mathbb{J}_2 - \frac{\varepsilon_1}{\mathbf{g}_1} \mathbb{J}_1 \right) \cdot \vec{a}_N$$

Se define $\tau \triangleq \frac{\varepsilon}{\mathbf{g}}$.

Por lo tanto:

$$\sigma = (\tau_2 \mathbb{J}_2 - \tau_1 \mathbb{J}_1) \cdot \vec{a}_N \rightarrow \sigma = (\tau_2 \mathbb{J}_2 \cdot \vec{a}_N - \tau_1 \mathbb{J}_1 \cdot \vec{a}_N)$$

$$\sigma = (\tau_2 - \tau_1) \mathbb{J}_1 \cdot \vec{a}_N$$

$$\sigma = (\tau_2 - \tau_1) J_{1N} \quad (6.41)$$

Si el tiempo de relajación es pequeño el material es buen conductor y si es grande se considera aislante.

De la Fig. 6.11:

$$\tan\theta_1 = \frac{J_{1T}}{J_{1N}} \quad \tan\theta_2 = \frac{J_{2T}}{J_{2N}}$$

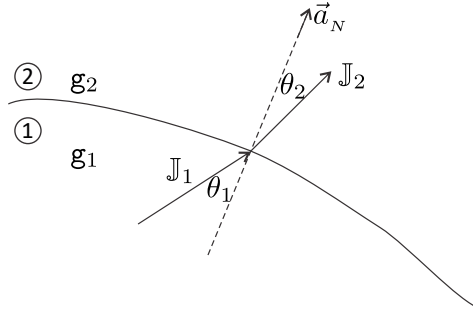


Figura 6.12 Ley de Snell.

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{J_{1T}}{J_{1N}} \frac{J_{2N}}{J_{2T}} = \frac{g_1 J_{1T}}{g_2 J_{2T}}$$

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{g_1}{g_2} \quad (6.42)$$

La Ec. (6.42) se conoce como la ley de Snell o de refracción de las líneas de densidad de corriente.

En la Fig. 6.12, $g_1 > g_2$ porque las líneas de campo se en el medio 1 se alejan más de la normal que en el medio 2.

6.13. Corriente de convección.

Es el caso de un aislante o masa que tiene una carga y se mueve con una velocidad, ver Fig. 6.13.

En un elemento de volumen existe un elemento de carga:

$$dQ = \rho d\tau = \rho dS d\ell \quad (6.43)$$

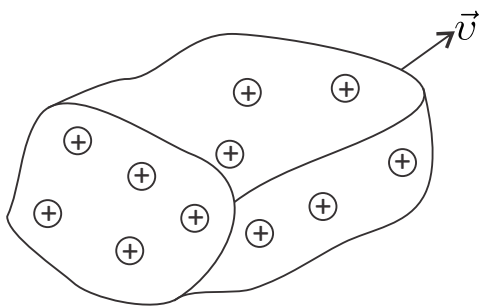


Figura 6.13 Corriente de convección.

Si ambos miembros de la Ec. (6.43) se dividen por dt , entonces $\frac{dQ}{dt} = \rho dS \frac{d\ell}{dt} = \rho dS v$ y $\frac{dI}{dS} = \rho v$. Así:

$$J = \rho v \quad (6.44)$$

Por lo tanto:

$$\frac{dP}{d\tau} = \rho \mathbb{E} \cdot \vec{v} \quad (6.45)$$

De la Ec. (6.45) se deduce que en el caso de las corrientes de convección no existen pérdidas por efecto Joule, la energía cinética de las partículas aumenta.

6.14. Ejemplos

Ejemplo 1.

Calcular la corriente que atraviesa (hacia afuera) la superficie de un cubo pequeño de $1[mm]$, centrado en el origen en $t = 0$, si:

- $\rho = 10^{-6} e^{-(10^{16}t + 10^{-3}x)} \left[\frac{C}{m^3} \right]$
- $\mathbb{J} = -10^{-10} \text{sen}(10^3t - 0,5x) \vec{a}_x \left[\frac{A}{m^2} \right]$
- $\rho = -10^6 \text{sen}(10^3t - 10^{-3}x) \left[\frac{C}{m^3} \right]$

SOLUCIÓN

$$a. \quad \nabla \cdot \mathbb{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -10^{-6} (-10^{16}) e^{-(10^{16}t + 10^{-3}x)} = 10^{10} e^{-(10^{16}t + 10^{-3}x)}$$

$$i = \oint_S \mathbb{J} \cdot d\mathbb{S} = \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbb{J} d\tau = \nabla \cdot \mathbb{J} \Delta\tau$$

$$i = \nabla \cdot \mathbb{J} \Big|_{\substack{t=0 \\ x=0}} \Delta\tau = 10^{10} (10^{-9}) = 10 [A] \quad \square$$

$$b. \quad \nabla \cdot \mathbb{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} = (-0,5) (-10^{10}) \cos(10^3t - 0,5x)$$

$$i = \nabla \cdot \mathbb{J} \Big|_{\substack{t=0 \\ x=0}} \Delta\tau = (0,5) 10^{10} (10^{-9}) = 5 [A] \quad \square$$

$$c. \quad \nabla \cdot \mathbb{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -10^6 (10^3) \cos(10^3t - 10^{-3}x) = -10^9 \cos(10^3t - 10^{-3}x)$$

$$i = \oint_S \mathbb{J} \cdot d\mathbb{S} = \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbb{J} d\tau = \nabla \cdot \mathbb{J} \Delta\tau$$

$$i = \nabla \cdot \mathbb{J} \Big|_{\substack{t=0 \\ x=0}} \Delta\tau = 10^9 (10^{-9}) = 1 [A] \quad \square$$

Ejemplo 2.

Encontrar la corriente en Amperios que cruza:

- a. el plano $z = -2$, si $\mathbb{J} = \frac{5e^{-r}}{\pi r} \vec{a}_z \left[\frac{A}{m^2} \right]$ en coordenadas cilíndricas.
- b. un cuadrado de $1[cm]$ de lado en el plano xy , centrado en el origen y de lados paralelos a los ejes coordenadas, si $\mathbb{J} = 3 \times 10^9 (z^2 \vec{a}_x + x^2 \vec{a}_z) \left[\frac{A}{m^2} \right]$

SOLUCIÓN

$$a. \quad i = \oint_S \mathbb{J} \cdot d\mathbb{S} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{5e^{-r}}{\pi r} \vec{a}_z \cdot r dr d\varphi \vec{a}_z = \frac{5}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-r} dr d\varphi = 10 [A] \quad \square$$

$$b. \quad i = \int_{-5 \times 10^{-3}}^{5 \times 10^{-3}} \int_{-5 \times 10^{-3}}^{5 \times 10^{-3}} 3 \times 10^9 (z^2 \vec{a}_x + x^2 \vec{a}_z) \cdot dx dy \vec{a}_z = 2,5 [A] \quad \square$$

Ejemplo 3.

Una muestra de cobre tiene una densidad de corriente de $1000 \left[\frac{A}{m^2} \right]$. Si se supone que cada átomo contribuye con un electrón de conducción:

- a. calcular la velocidad de arrastre electrónica correspondiente a esta densidad de corriente.
- b. utilizar la conductividad observada para calcular el tiempo medio de colisión para un electrón del cobre.

SOLUCIÓN

$$m_e = 9,1 \times 10^{-31} [Kg] \quad e = 1,6 \times 10^{-19} [C]$$

$$N_A = 6,02 \times 10^{23} \left[\frac{at}{mol} \right] \quad \delta = 8,92 \left[\frac{gr}{mol} \right]$$

$$\eta = 1,69 \times 10^{-8} [\Omega m] \quad \omega = 63,5 \left[\frac{gr}{cm^3} \right]$$

$$N = \frac{N_A \delta}{\omega} \quad J = Nev \quad v = \frac{J\omega}{N_A e \delta}$$

$$v = \frac{1000 \times 63,5}{6,02 \times 10^{23} \times 1,6 \times 10^{-19} \times 8,92} = 7,39 \times 10^{-8} \left[\frac{m}{s} \right] \quad \square$$

$$t = \frac{2mg}{Ne^2} = \frac{2 \times 9,1 \times 10^{-31}}{8,46 \times 10^{28} \times 1,69 \times 10^{-8} \times (1,6 \times 10^{-19})^2} = 5 \times 10^{-14} [s] \quad \square$$

Ejemplo 4.

La densidad volumétrica de carga en cierta región decrece a razón de $2 \times 10^8 \left[\frac{A}{m^2} \right]$.

- cuál es la corriente total que cruza un diferencial de superficie esférica de radio $10^{-5} [m]$?
- cuál es el valor medio de la componente de la densidad de corriente dirigida hacia afuera a través de la superficie esférica?

SOLUCIÓN

$$a. \quad \nabla \cdot \mathbb{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(-2 \times 10^8) = 2 \times 10^8$$

$$i = \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbb{J} d\tau = \nabla \cdot \mathbb{J} \Delta \tau = 2 \times 10^8 \times \frac{4\pi}{3} \times (10^{-5})^3 = 8,38 \times 10^{-7} [A]$$

$$i = 0,838 [\mu A] \quad \square$$

$$b. \quad J = \frac{I}{S} = \frac{\frac{8\pi}{3} \times 10^{-7}}{4\pi \times (10^{-5})^2} = 666,67 [A] \quad \square$$

Ejemplo 5.

Dos placas metálicas paralelas, planas y muy grandes están separadas una distancia d . El espacio entre las placas se llena con dos medios conductores, siendo la superficie de separación entre estos medios un plano paralelo a las placas metálicas. El primer medio tiene conductividad g_1 y permitividad ε_1 es de espesor a y el segundo tiene conductividad g_2 y permitividad ε_2 . En el estado estacionario, cuál es el potencial de separación de los dos medios y cuál es la densidad superficial de carga libre en ésta, si las placas se mantienen a los potenciales V_o y U_o ; respectivamente, como se muestra en la Fig. 6.14.

SOLUCIÓN

Se supone $U_o > V_o$. Existe variación sólo en la coordenada z . La solución a la ecuación de Laplace en ambas regiones está dada por:

$$V_1 = A_1 z + B_1 \quad \mathbb{E}_1 = -A_1 z \quad 0 < z < a \quad (6.46)$$

$$V_2 = A_2 z + B_2 \quad \mathbb{E}_2 = -A_2 z \quad 0 < z < a \quad (6.47)$$

El problema consiste en determinar las constantes A_1, A_2, B_1, B_2 a partir de las condiciones de frontera especificadas en el enunciado.

a. $z = 0 \quad V_1 = V_o$

$$V_1 = A_1 \cdot 0 + B_1 \longrightarrow B_1 = V_o \quad (6.48)$$

Si la Ec. (6.48) se remplace en la Ec. (6.46):

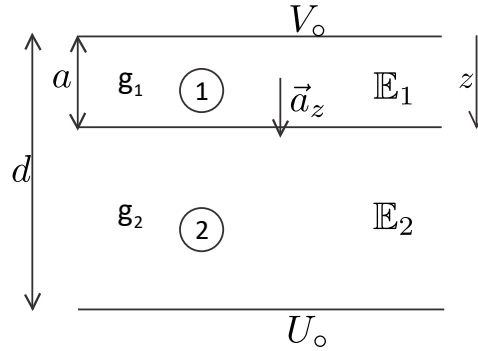


Figura 6.14 Ejemplo 5.

$$V_1 = A_1 z + V_o \quad (6.49)$$

b. $z = d \quad V_2 = U_o$

$$U_o = A_2 d + B_2 \longrightarrow B_2 = U_o - A_2 d \quad (6.50)$$

Si la Ec. (6.50) se remplace en la Ec. (6.47):

$$V_2 = A_2 (z - d) + U_o \quad (6.51)$$

c. $z = a \quad V_1 = V_2$

Esta condición se logra a partir de las Ecs. (6.49) y (6.51):

$$V_1 = A_1 a + V_o \quad V_2 = A_2 (a - d) + U_o$$

$$A_1 a + V_o = A_2 (a - d) + U_o$$

$$A_1 = \frac{A_2 (a - d) + U_o - V_o}{a} \quad (6.52)$$

Si la Ec. (6.52) se remplaza en la Ec. (6.49):

$$V_1 = \left[\frac{A_2 (a - d) + U_o - V_o}{a} \right] z + V_o \quad (6.53)$$

d. El campo eléctrico se obtiene de las Ecs. (6.51) y Ec. (6.53):

$$\frac{\partial V_1}{\partial z} = \frac{A_2 (a - d) + U_o - V_o}{a} \quad \frac{\partial V_2}{\partial z} = A_2$$

$$\mathbb{E}_1 = -\frac{\partial V_1}{\partial z} \vec{a}_z = \frac{A_2 (d - a) + V_o - U_o}{a} \vec{a}_z$$

$$\mathbb{D}_1 = \varepsilon_1 \mathbb{E}_1 = \varepsilon_1 \frac{A_2 (d - a) + V_o - U_o}{a} \vec{a}_z$$

$$\mathbb{J}_1 = \mathbf{g}_1 \mathbb{E}_1 = \mathbf{g}_1 \frac{A_2 (d - a) + V_o - U_o}{a} \vec{a}_z$$

e. $z = a \quad \mathbb{J}_1 \cdot \vec{a}_z = \mathbb{J}_2 \cdot \vec{a}_z$

Esta condición de frontera se utiliza cuando el sistema ha alcanzado el estado estacionario. De $\mathbb{J}_1 = \mathbf{g}_1 \mathbb{E}_1 = -\mathbf{g}_1 A_1 \vec{a}_z$ y $\mathbb{J}_2 = \mathbf{g}_2 \mathbb{E}_2 = -\mathbf{g}_2 A_2 \vec{a}_z$, se determina el valor de la constante A_2 :

$$A_1 \mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_1 \frac{A_2 (a - d) + U_o - V_o}{a} = \mathbf{g}_2 A_2$$

$$A_2 = \frac{\mathbf{g}_1 (U_o - V_o)}{a \mathbf{g}_2 + (d - a) \mathbf{g}_1} \quad (6.54)$$

f. El potencial de la placa que separa ambos medios se obtiene al remplazar la Ec. (6.54) en la Ec. (6.51) y tener presente que $z = a$:

$$V_2 = \frac{\mathbf{g}_1 (U_o - V_o) (a - d)}{a \mathbf{g}_2 + (d - a) \mathbf{g}_1} + U_o$$

$$V_2 = \frac{(d - a) \mathbf{g}_1 V_o + a \mathbf{g}_2 U_o}{a \mathbf{g}_2 + (d - a) \mathbf{g}_1} \quad (6.55)$$

g. La densidad de carga superficial en la placa situada en $z = a$, se obtiene como se muestra a continuación:

$$\sigma = (\mathbb{D}_2 - \mathbb{D}_1) \cdot \vec{a}_z = -\varepsilon_2 A_2 + \varepsilon_1 A_1 = -\varepsilon_2 A_2 + \varepsilon_1 \frac{\mathbf{g}_2}{\mathbf{g}_1} A_2$$

$$\sigma = \frac{\varepsilon_1 \mathbf{g}_2 - \varepsilon_2 \mathbf{g}_1}{\mathbf{g}_1} A_2$$

$$\sigma = \frac{(\varepsilon_1 g_2 - \varepsilon_2 g_1)(U_o - V_o)}{a g_2 + (d - a) g_1} \quad (6.56)$$

Ejemplo 6.

Dos cáscaras metálicas, largas, cilíndricas de radios a y b con $b > a$, se disponen coaxialmente. Las placas se mantienen a la diferencia de potencial V_o .

- Si la región entre las cáscaras se llena con un medio de conductividad g , utilizar la ley de Ohm para calcular la corriente eléctrica por unidad de longitud entre las cáscaras.
- Si la región entre las cáscaras se llena con un medio no conductor de permitividad ε , calcular la capacitancia de este sistema.
- Demostrar explícitamente que para esta disposición geométrica el producto de la resistencia y la capacitancia es $\frac{\varepsilon}{g}$.

SOLUCIÓN

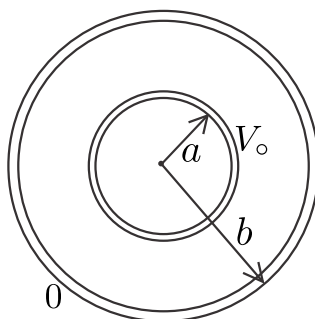


Figura 6.15 Ejemplo 6.

En este caso existe variación sólo con la coordenada radial y la solución a la ecuación de Laplace para el potencial está dada por:

$$V = A \ln r + B \quad (6.57)$$

El problema consiste en determinar las constantes A y B a partir de las condiciones de frontera especificadas en el enunciado.

a. $r = a \quad V = V_o$

$$V_o = A \ln a + B \longrightarrow B = V_o - A \ln a \quad (6.58)$$

Si la Ec. (6.58) se remplaza en la Ec. (6.57):

$$V = A \ln \frac{r}{a} + V_o \quad (6.59)$$

b. $r = b \quad V = 0$

$$0 = A \ln \frac{b}{a} + V_o \longrightarrow A = -\frac{V_o}{\ln \frac{b}{a}} \quad (6.60)$$

Si la Ec. (6.60) se remplaza en la Ec. (6.59):

$$V = V_o \left[1 - \frac{\ln \frac{r}{a}}{\ln \frac{b}{a}} \right] \quad (6.61)$$

De la Ec. (6.61), se obtiene:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{V_o}{r \ln \frac{b}{a}}$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{E} = \frac{V_o}{r \ln \frac{b}{a}} \vec{a}_r \quad (6.62)$$

$$\mathbb{J} = \frac{g V_o}{r \ln \frac{b}{a}} \vec{a}_r \quad (6.63)$$

La corriente que sale de la cáscara cilíndrica interior, está dada por:

$$i = \int_S \mathbb{J} \cdot d\mathbb{S} = \frac{g V_o}{a \ln \frac{b}{a}} \int_0^\ell \int_0^{2\pi} \vec{a}_r \cdot a d\varphi dz \vec{a}_r$$

$$i = \frac{2\pi\ell g V_o}{\ln \frac{b}{a}} \quad (6.64)$$

De la Ec. (6.64) se obtiene la resistencia:

$$R = \frac{V_o}{i} = \frac{\ln \frac{b}{a}}{2\pi\ell g} \quad (6.65)$$

c. Si $r = a$:

$$\mathbb{D} = \varepsilon \mathbb{E} = \frac{\varepsilon V_o}{a \ln \frac{b}{a}} \vec{a}_r \quad Q = \int_S \mathbb{D} \cdot d\mathbb{S} = \frac{2\pi\varepsilon\ell V_o}{\ln \frac{b}{a}} \quad (6.66)$$

$$C = \frac{Q}{V_o} = \frac{2\pi\varepsilon\ell}{\ln \frac{b}{a}} \quad (6.66)$$

$$RC = \frac{\ln \frac{b}{a}}{2\pi\ell g} \frac{2\pi\varepsilon\ell}{\ln \frac{b}{a}} = \frac{\varepsilon}{g} \quad (6.67)$$

Ejemplo 7.

Considerar una esfera conductora de radio a , rodeada por el espacio libre. Los parámetros de la esfera son ε , μ y g y los del espacio libre son ε_o , μ_o y $\mathbf{g} = 0$. En $t = 0$ una carga está uniformemente distribuida a través de la esfera conductora con una densidad de carga volumétrica ρ_o . Hallar:

- el campo eléctrico y la densidad de corriente como una función de la posición y el tiempo.
- la densidad superficial de carga sobre la superficie.

SOLUCIÓN

- Para $r < a$:

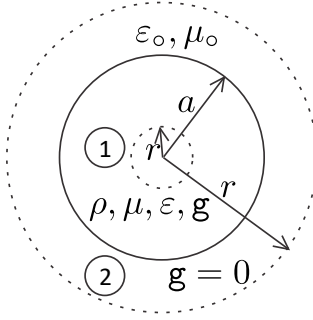


Figura 6.16 Ejemplo 7.

$$\oint_S \mathbb{D}_1 \cdot d\mathbb{S} = Q_{enc}$$

$$\mathbb{D}_1 = D_1 \vec{a}_r \quad d\mathbb{S} = dS \vec{a}_r \quad \oint_S \mathbb{D}_1 \cdot d\mathbb{S} = D_1 4\pi r^2$$

$$Q_{enc} = \int_{\tau} \rho d\tau = \rho_o e^{-\frac{t}{\tau}} \int_{\tau} d\tau = \frac{4\pi \rho_o r^3}{3} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\mathbb{D}_1 = \frac{\rho_o r e^{-\frac{t}{\tau}}}{3} \vec{a}_r$$

Pero:

$$\mathbb{E}_1 = \frac{\mathbb{D}_1}{\varepsilon} = \frac{\rho_o r e^{-\frac{t}{\tau}}}{3\varepsilon} \vec{a}_r \quad \mathbb{J}_1 = \frac{\mathbf{g} \rho_o r e^{-\frac{t}{\tau}}}{3\varepsilon} \vec{a}_r$$

□

b. Para $r > a$:

$$\oint_S \mathbb{D}_2 \cdot d\mathbb{S} = Q_{enc}$$

$$\mathbb{D}_2 = D_2 \vec{a}_r \quad d\mathbb{S} = dS \vec{a}_r \quad \oint_S \mathbb{D}_2 \cdot d\mathbb{S} = D_2 4\pi r^2$$

$$Q_{enc} = \int_{\tau} \rho d\tau = \rho_o e^{-\frac{t}{\tau}} \int_{\tau} d\tau = \frac{4\pi \rho_o a^3}{3}$$

$$\mathbb{D}_2 = \frac{\rho_o a^3}{3r^2} \vec{a}_r$$

Pero:

$$\mathbb{E}_2 = \frac{\mathbb{D}_2}{\varepsilon_o} = \frac{\rho_o a^3}{3\varepsilon_o r^2} \vec{a}_r \quad \mathbb{J}_2 = 0$$

□

$$\sigma = (\mathbb{D}_2 - \mathbb{D}_1) \cdot \vec{a}_r = \frac{\rho_o a}{3} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

□

Ejemplo 8.

Dos electrodos cilíndricos de radio a se orientan normalmente a un disco de silicio de espesor t y están separados axialmente por la distancia b . Los electrodos se introducen dentro del disco a la profundidad t en otras palabras, atraviesan completamente el disco. Las dimensiones laterales del disco son grandes comparadas con b , o sea, son muy largas. Si la conductividad del silicio es g , hallar la intensidad de la corriente entre los electrodos cuando su diferencia de potencial es ΔU .

SOLUCIÓN

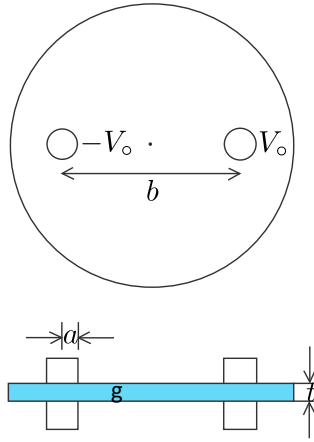


Figura 6.17 Ejemplo 8.

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \operatorname{arccosh} \left(\frac{h}{a} \right) \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$V = E r \operatorname{arccosh} \left(\frac{h}{a} \right) \quad J = gE = \frac{gV}{r \operatorname{arccosh} \left(\frac{h}{a} \right)}$$

Para $r = a$:

$$\Delta U = V_0 - (-V_0) = 2V_0 \quad h = \frac{b}{2}$$

$$i = JS = \frac{g \frac{\Delta U}{2} 2\pi a t}{a \operatorname{arccosh} \left(\frac{b}{2a} \right)} = \frac{2\pi g V_0 t}{\operatorname{arccosh} \left(\frac{b}{2a} \right)}$$

□

Ejemplo 9.

El cable coaxial de la Fig. 6.18 tiene dos capas cilíndricas concéntricas de aislante de permitividades ε_1 y ε_2 y conductividades g_1 y g_2 . Si el conductor externo se mantiene a un potencial V_0 respecto al interno, ¿cuál es el campo eléctrico en el estado estacionario en cada dieléctrico con pérdidas y cuál es la densidad de carga superficial en la entrecara de los dos dieléctricos?

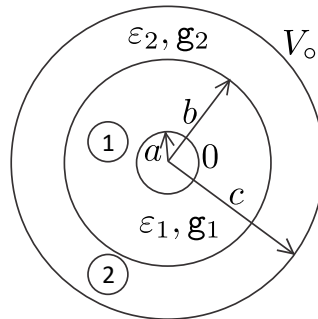
SOLUCIÓN

Figura 6.18 Ejemplo 9.

En este caso existe variación sólo con la coordenada radial y la solución a la ecuación de Laplace para el potencial está dada por:

$$V_1 = A_1 \ln r + B_1 \quad a \leq r \leq b \quad (6.68)$$

$$V_2 = A_2 \ln r + B_2 \quad b \leq r \leq c \quad (6.69)$$

El problema consiste en determinar las constantes A_1 , A_2 , B_1 , B_2 a partir de las condiciones de frontera especificadas en el enunciado.

a. $r = a \quad V_1 = 0$

$$0 = A_1 \ln a + B_1 \longrightarrow B_1 = -A_1 \ln a \quad (6.70)$$

Si la Ec. (6.70) se remplaza en la Ec. (6.68):

$$V_1 = A_1 \ln \frac{r}{a} \quad (6.71)$$

$$\text{b.} \quad r = c \quad V_2 = V_o$$

$$V_o = A_2 \ln c + B_2 \longrightarrow B_2 = V_o - A_2 \ln c \quad (6.72)$$

Si la Ec. (6.72) se remplaza en la Ec. (6.69):

$$V_2 = V_o + A_2 \ln \frac{r}{c} \quad (6.73)$$

$$\text{c.} \quad r = b \quad V_1 = V_2$$

$$V_1 = A_1 \ln \frac{b}{a} \quad V_2 = V_o + A_2 \ln \frac{b}{c}$$

$$A_1 \ln \frac{b}{a} = V_o + A_2 \ln \frac{b}{c} \quad (6.74)$$

De las Ecs. (6.71) y (6.73), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dr} &= \frac{A_1}{r} & \frac{dV_2}{dr} &= \frac{A_2}{r} \\ \mathbb{E}_1 &= -\frac{A_1}{r} \vec{a}_r \longrightarrow \mathbb{D}_1 = -\frac{\varepsilon_1 A_1}{r} \vec{a}_r \longrightarrow \mathbb{J}_1 = -\frac{\mathbf{g}_1 A_1}{r} \vec{a}_r \end{aligned} \quad (6.75)$$

$$\mathbb{E}_2 = -\frac{A_2}{r} \vec{a}_r \longrightarrow \mathbb{D}_2 = -\frac{\varepsilon_2 A_2}{r} \vec{a}_r \longrightarrow \mathbb{J}_2 = -\frac{\mathbf{g}_2 A_2}{r} \vec{a}_r \quad (6.76)$$

$$\text{d.} \quad r = b \quad \mathbb{J}_1 \cdot \vec{a}_r = \mathbb{J}_2 \cdot \vec{a}_r$$

$$-\frac{\mathbf{g}_1 A_1}{b} \vec{a}_r = -\frac{\mathbf{g}_2 A_2}{b} \vec{a}_r$$

$$A_2 = \frac{\mathbf{g}_1}{\mathbf{g}_2} A_1 \quad (6.77)$$

Si se resuelve el sistema de Ecs. (6.74) y (6.77), se obtiene:

$$A_1 = \frac{V_o \mathbf{g}_2}{\ln \left[\left(\frac{b}{a} \right)^{\mathbf{g}_2} \left(\frac{c}{b} \right)^{\mathbf{g}_1} \right]} \quad (6.78)$$

$$A_2 = \frac{V_o \mathbf{g}_1}{\ln \left[\left(\frac{b}{a} \right)^{\mathbf{g}_2} \left(\frac{c}{b} \right)^{\mathbf{g}_1} \right]} \quad (6.79)$$

Si las Ecs. (6.70) y (6.78) se rempazan en las expresiones respectivas del campo eléctrico, se obtiene:

$$\mathbb{E}_1 = - \frac{V_o \mathbf{g}_2}{r \ln \left[\left(\frac{b}{a} \right)^{\mathbf{g}_2} \left(\frac{c}{b} \right)^{\mathbf{g}_1} \right]} \vec{a}_r \quad (6.80)$$

$$\mathbb{E}_2 = - \frac{V_o \mathbf{g}_1}{r \ln \left[\left(\frac{b}{a} \right)^{\mathbf{g}_2} \left(\frac{c}{b} \right)^{\mathbf{g}_1} \right]} \vec{a}_r \quad (6.81)$$

Para el caso de estado estacionario, la densidad de carga superficial en la frontera se obtiene de la siguiente manera:

$$\sigma = (\mathbb{D}_2 - \mathbb{D}_1) \cdot \vec{a}_r$$

$$\sigma = \frac{(\varepsilon_1 \mathbf{g}_2 - \varepsilon_2 \mathbf{g}_1) V_o}{b \ln \left[\left(\frac{b}{a} \right)^{\mathbf{g}_2} \left(\frac{c}{b} \right)^{\mathbf{g}_1} \right]} \quad (6.82)$$

Ejemplo 10.

Obtener la resistencia de un codo de barra colectora de aluminio, doblada en forma de cuadrante de anillo circular con $a = 5 [cm]$, $b = 1,27 [cm]$ y $c = 5,08 [cm]$, $g = \frac{1}{2,67} [\Omega cm^{-1}]$ como se muestra en la Fig. 6.19.

SOLUCIÓN

La resistencia se obtiene de la siguiente manera:

$$R = \int_C \frac{du_2}{\int_S \frac{h_1 du_1 h_3 du_3}{\mathbf{g} h_2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\int_0^c \int_a^{a+b} \frac{dr dz}{\mathbf{g} r}}$$

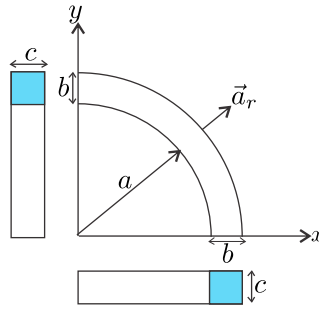


Figura 6.19 Ejemplo 10.

$$R = \frac{\pi}{2gc \ln \left(\frac{a+b}{a} \right)}$$

Si se remplazan los valores del enunciado:

$$R = 3,67 \times 10^{-6} [\Omega] = 3,67 [\mu\Omega]$$

□

Ejemplo 11.

Hallar la resistencia equivalente entre los terminales x e y del circuito mostrado en la Fig. 6.20.

SOLUCIÓN

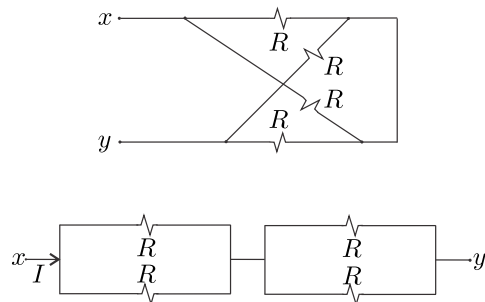


Figura 6.20 Ejemplo 11.

De la Fig. 6.20, la resistencia equivalente se obtiene de la siguiente manera:

$$R_{eq} = \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R$$

□

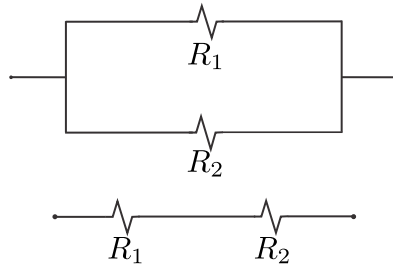
Ejemplo 12.

Figura 6.21 Ejemplo 12.

Dos bombillas eléctricas, una de resistencia R_1 y otra de resistencia R_2 , $R_2 < R_1$, se encuentran en:

a. paralelo

b. serie

¿cuál lámpara incandescente suministra más luz?. Ver Fig.6.21.

SOLUCIÓN

a. Si $R_1 > R_2$, entonces $P_2 > P_1$ ya que $P = \frac{V^2}{R}$. Ilumina más la lámpara incandescente de resistencia R_2 □

b. $I_1 = I_2$, si $R_1 > R_2$, entonces $P_1 > P_2$ ya que $P = I^2 R$. Ilumina más la lámpara incandescente de resistencia R_1 □

Ejemplo 13.

Calcular la corriente y la resistencia del conductor curvo mostrado en la Fig. 6.22. Las condiciones son:

a. en $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $V = V_o$

b. en $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ $V = -V_o$

c. en $r = a$ y $r = b$ $\frac{\partial V}{\partial r} = 0$

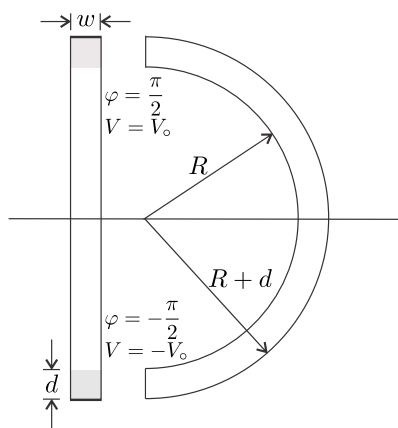


Figura 6.22 Ejemplo 13.

SOLUCIÓN

En este caso existe variación sólo con la coordenada φ y la solución a la ecuación de Laplace para el potencial es:

$$V = A\varphi + B \quad (6.83)$$

El problema queda solucionado al determinar las constantes A y B , a partir de las condiciones de frontera dadas en el enunciado.

a. Si $\varphi = \frac{\pi}{2} \quad V = V_0$

$$V_0 = A\frac{\pi}{2} + B \longrightarrow B = V_0 - A\frac{\pi}{2} \quad (6.84)$$

Si la Ec. (6.84) se remplaza en la Ec. (6.83):

$$V = A\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) + V_0 \quad (6.85)$$

b. Si $\varphi = -\frac{\pi}{2} \quad V = -V_0$

$$-V_0 = A\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + V_0$$

$$A = \frac{2V_0}{\pi} \quad (6.86)$$

Si el valor de la Ec. (6.86) se remplacea en la Ec. (6.85):

$$V = \frac{2V_o}{\pi} \varphi \quad (6.87)$$

El campo eléctrico se obtiene a partir del gradiente negativo del potencial eléctrico.

$$\mathbb{E} = -\frac{2V_o}{\pi r} \vec{a}_\varphi \quad (6.88)$$

La densidad de corriente eléctrica se obtiene así:

$$\mathbb{J} = -\frac{2gV_o}{\pi r} \vec{a}_\varphi \quad (6.89)$$

La corriente eléctrica se obtiene al hallar el flujo del vector densidad de corriente a través de la sección transversal del conductor, en este caso se utilizará la situada en $\varphi = -\frac{\pi}{2}$:

$$i = \int_S \mathbb{J} \cdot d\mathbb{S} = - \int_a^b \int_a^{a+t} \frac{2gV_o}{\pi r} \vec{a}_\varphi \cdot dr dz (-\vec{a}_\varphi) \quad (6.90)$$

$$i = \frac{2gtV_o}{\pi} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

La resistencia del conductor se obtiene de la corriente que circula a través del conductor y la diferencia de potencial entre los extremos del conductor.

$$R = \frac{V_{12}}{i} = \frac{2V_o}{i} = \frac{\pi}{gt \ln \left(\frac{b}{a} \right)} \quad (6.91)$$

Ejemplo 14.

Partículas de polvo electrificado se lanzan a la atmósfera y forman una nube alargada, aproximadamente cilíndrica, a una altura de 40 [m]. La nube es arrastrada por el viento, que se mueve a una velocidad de $3 \left[\frac{m}{s} \right]$. La corriente que alimenta a la nube es de 80 [μA]. Calcular la intensidad de campo eléctrico resultante en la

superficie de la tierra situada debajo de la nube. Suponer que la tierra es plana y conductora.

SOLUCIÓN

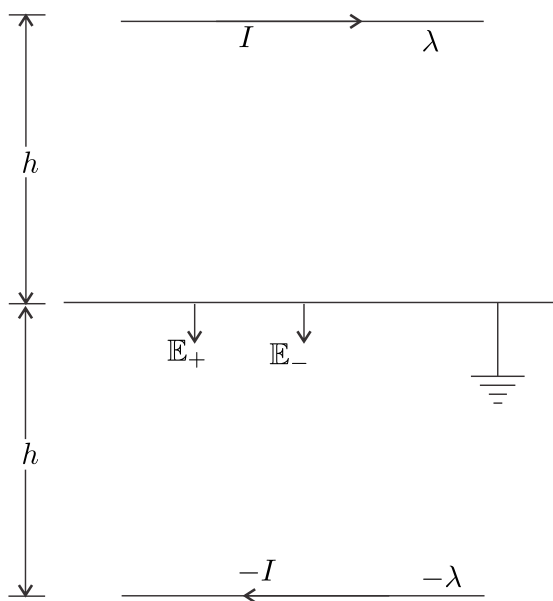


Figura 6.23 Ejemplo 14.

$$J = \frac{i}{S} \quad J = \rho v = \frac{Q}{\tau} v = \frac{Q}{\ell S} v = \frac{i}{S} \quad i = \lambda v$$

$$E_+ = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 h} \quad E_- = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 h}$$

$$E = E_+ + E_- = \frac{2\lambda}{2\pi\epsilon_0 h} = \frac{i}{\pi\epsilon_0 v h}$$

$$E = \frac{80 \times 10^{-6}}{\pi \times 8,85 \times 10^{-12} \times 3 \times 40} = 24 [Kv]$$

□

Ejemplo 15.

Considerar dos esferas concéntricas de radios a y b , $a < b$. La esfera interior se mantiene a un potencial V_0 con respecto a la exterior y la conductividad del medio entre ellas es g . Determinar la resistencia del sistema.

SOLUCIÓN

En este caso el campo eléctrico varía con la coordenada radial y la solución de la ecuación de Laplace para el potencial es:

$$V = -\frac{A}{r} + B \quad (6.92)$$

$$\mathbb{E} = -\frac{A}{r^2} \vec{a}_r \quad (6.93)$$

$$\mathbb{J} = -\frac{\mathbf{g}A}{r^2} \vec{a}_r \quad (6.94)$$

a. Si $r = a$ $V = V_o$

$$V_o = -\frac{A}{a} + B \longrightarrow B = V_o + \frac{A}{a} \quad (6.95)$$

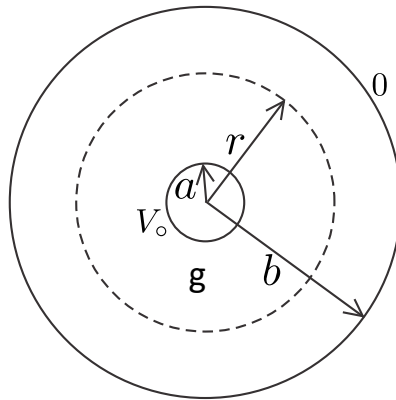


Figura 6.24 Ejemplo 15.

Si la Ec. (6.95) se reemplaza en la Ec. (6.92):

$$V = V_o + A \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) \quad (6.96)$$

b. Si $r = b$ $V = 0$

$$0 = V_o + A \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \longrightarrow A = \frac{V_o}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \quad (6.97)$$

$$\mathbb{J} = \frac{V_o \mathbf{g}}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) r^2} \vec{a}_r \quad (6.98)$$

$$i = \int_S \mathbb{J} \cdot d\mathbb{S}$$

$$i = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{V_o \mathbf{g}}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) a^2} \vec{a}_r \cdot a^2 \sin\theta d\theta d\varphi \vec{a}_r$$

$$i = \frac{4\pi \mathbf{g} V_o a b}{b - a} \quad (6.99)$$

$$R = \frac{V_o}{i} = \frac{b - a}{4\pi a b \mathbf{g}} \quad (6.100)$$

Otra solución.

$$R = \int_C \frac{du_1}{\int_S \mathbf{g} \frac{h_2 du_2 h_3 du_3}{h_1}} = \int_a^b \frac{dr}{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathbf{g} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi}$$

$$R = \frac{V_o}{i} = \frac{b - a}{4\pi a b \mathbf{g}} \quad \square$$

Otra solución.

Se supone que la corriente sale uniformemente de la superficie esférica $r = a$. En la superficie r :

$$\mathbb{J} = \frac{i}{4\pi r^2} \quad \mathbb{E} = \frac{\mathbb{J}}{\mathbf{g}} = \frac{i}{4\pi \mathbf{g} r^2} \vec{a}_r$$

$$R = \frac{V_o}{i} = \frac{b - a}{4\pi a b \mathbf{g}} \quad \square$$

Otra solución.

Si el campo eléctrico idéntico se produjera por cargas electrostáticas sobre ambos conductores:

$$Q = \int_S \mathbb{D} \cdot d\mathbb{S} \longrightarrow \int_S \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = \frac{Q}{\varepsilon} \quad (6.101)$$

Donde Q es la carga libre sobre un conductor rodeado por la superficie S y ε la permitividad del medio. En esta circunstancia los dos conductores constituirán un capacitor:

$$C = \frac{Q}{V_a - V_b} = \frac{Q}{V_o - 0} = \frac{Q}{V_o} \quad (6.102)$$

También:

$$i = \frac{V_a - V_b}{R} = \frac{V_o - 0}{R} = \frac{V_o}{R} \quad (6.103)$$

$$\mathbb{J} = g\mathbb{E} \longrightarrow i = g \oint_S \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} \quad (6.104)$$

Si la Ec. (6.101) se sustituye en la Ec. (6.104):

$$i = \frac{gQ}{\varepsilon} \quad (6.105)$$

Si los valores de las Ecs. (6.103) y (6.105), se igualan:

$$\frac{V_o}{R} = \frac{gQ}{\varepsilon} \quad (6.106)$$

De la Ec. (6.102):

$$Q = V_o C \quad (6.107)$$

Si el valor de la Ec. (6.107) se remplacea en la Ec. (6.106):

$$RC = \frac{\varepsilon}{g} \quad (6.108)$$

Si se conoce la capacitancia del sistema propuesto, basta remplazar su valor en la Ec. (6.108).

Ejemplo 16.

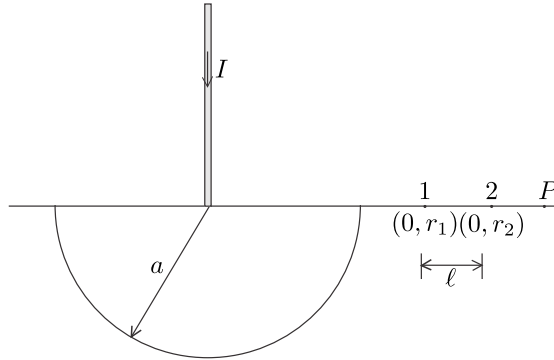


Figura 6.25 Ejemplo 16.

Con el fin de lograr una buena conexión a tierra un conductor semiesférico se introduce en la tierra al nivel de su superficie, ver Fig. 6.25.

- Hallar la tensión bajo la cual puede resultar afectada una persona que se acerca a la toma de tierra.
- Determinar la resistencia total a tierra si la conductividad de ésta es g , el radio de la semiesfera es a , la longitud del paso es ℓ , la intensidad de la corriente i que circula por el hilo está prefijada y la distancia entre el pie del hombre que está más cerca de la toma de tierra y ésta es r_1 .

SOLUCIÓN

En este caso la solución a la ecuación de Laplace es:

$$V = -\frac{A}{r} + B \quad (6.109)$$

- Si el punto P está muy alejado, se tiene:

$$r \rightarrow \infty \quad V = 0$$

$$0 = -\frac{A}{\infty} + B \longrightarrow B = 0 \quad (6.110)$$

Si la Ec. (6.110) se remplaza en la Ec. (6.109):

$$V = -\frac{A}{r} \quad (6.111)$$

b. Si $r = a$ $V = V_o$

de la Ec. (6.111):

$$A = -aV_o \quad (6.112)$$

Si la Ec. (6.112) se reemplaza en la Ec. (6.111):

$$V = \frac{aV_o}{r} \quad (6.113)$$

De la Ec. (6.113), se obtiene:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{aV_o}{r^2} **$$

$$\mathbb{E} = \frac{aV_o}{r^2} \vec{a}_r \quad (6.114)$$

$$\mathbb{J} = g\mathbb{E} = \frac{agV_o}{r^2} \vec{a}_r \quad (6.115)$$

En la superficie semiesférica conductora:

$$i = \int_S \mathbb{J} \cdot d\mathbb{S} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{\frac{\pi}{0}}^{2\pi} \frac{agV_o}{a^2} \vec{a}_r \cdot a^2 \sin\theta d\theta d\varphi \vec{a}_r$$

$$i = 2\pi agV_o \quad (6.116)$$

$$R = \frac{V_o}{i} = \frac{1}{2\pi ag} \quad (6.117)$$

La resistividad del suelo varía con la naturaleza geológica del mismo, la humedad, la salinidad y la temperatura. Esta variación impide utilizar la tierra como conductor de retorno.

Se calculará la diferencia de potencial entre los puntos 1 y 2 en la superficie terrestre cercanos a un poste de transmisión de energía eléctrica cuando una corriente de corto circuito circula del cable a la tierra.

De la Ec. (6.113) se tiene $V_1 = \frac{aV_o}{r_1}$ y $V_2 = \frac{aV_o}{r_2}$. Por lo tanto, la diferencia de potencial entre estos puntos es:

$$V_1 - V_2 = aV_o \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (6.118)$$

.

De la Ec. (6.116), se tiene:

$$aV_o = \frac{i}{2\pi g} \quad (6.119)$$

Si la expresión Ec. (6.119) se reemplaza en la Ec. (6.118):

$$V_{12} = V_1 - V_2 = \frac{i}{2\pi g} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (6.120)$$

Para: $r_1 = 1 [m]$ $r_2 = 1,5 [m]$ $i = 1600 [A]$ $g = 0,01 [Um^{-1}]$

$$V_{12} = \frac{1600}{2 \times \pi \times 10^{-2}} \left(1 - \frac{1}{1,5} \right) = 8,49 [Kv] \quad (6.121)$$

Si los cables de alta tensión caen sobre la tierra surge una situación peligrosa, pues, probablemente haya contacto directo entre el cable y el hombre y aparecen voltajes denominados tipo tensión de paso.

Si los pies de una persona están colocados en los puntos 1 y 2 separados $0,5 [m]$, la resistencia equivalente se calculará como la de las semiesferas de $0,05 [m]$ de radio. Se tendrá una resistencia del cuerpo humano con los contactos así:

$$R = \frac{1}{2\pi a g} = \frac{1}{2\pi \times 5 \times 10^{-2} \times 10^{-2}} = 318,12 [Kv]$$

$$i = \frac{V_{12}}{R} = \frac{8,49 \times 10^3}{318,12} = 13,33 [A] \quad (6.122)$$

La magnitud de esta corriente es mortal para el organismo humano.

Ejemplo 17.

Determinar la resistencia entre dos tomas de tierra semiesféricas.

SOLUCIÓN

En un punto P entre las dos tomas el campo total es la superposición de los debidos a cada una de las semiesferas y el infinito.

$$\mathbb{J}_1 = \frac{i_1}{2\pi r^2} \vec{a}_r \quad \mathbb{E}_1 = \frac{J_1}{g} = \frac{i_1}{2\pi g r^2} \vec{a}_r$$

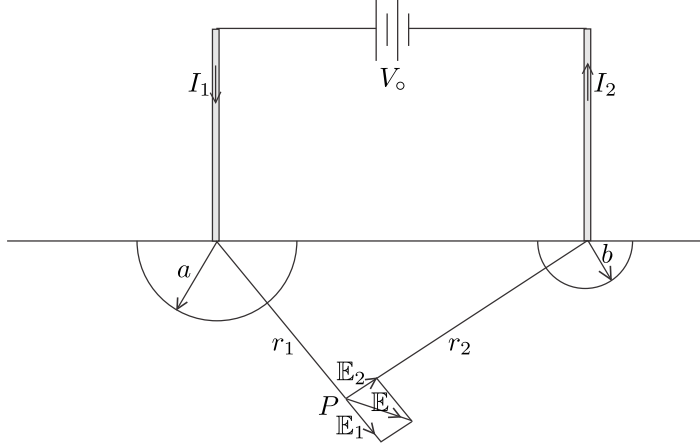


Figura 6.26 Ejemplo 17.

Pero:

$$\int_{V_a}^{V_P} dV = - \int_a^{r_1} \mathbb{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_a^{r_1} \frac{i_1}{2\pi g r^2} \vec{a}_r \cdot dr \vec{a}_r$$

$$V_{Pa} = \frac{i_1}{2\pi g} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{a} \right) \quad (6.123)$$

Del mismo modo se obtiene la diferencia de potencial entre la semiesfera de radio b y el punto P .

$$V_{Pb} = \frac{i_2}{2\pi g} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{b} \right) \quad (6.124)$$

Pero:

$$i_1 = -i_2 = i \quad (6.125)$$

Si el valor de la Ec. (6.125) se sustituye en las Ecs. (6.123) y (6.124) y de la primera se resta la segunda, se obtiene:

$$V_{21} = \frac{i}{2\pi g} \left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right]$$

$$R_{21} = \frac{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)}{2\pi g} \quad (6.126)$$

De la expresión anterior no se puede deducir experimentalmente la resistividad de la superficie; ésta suele ser buena o mala conductora y tener una capa inferior buena conductora. La resistencia dependerá de la distribución de las capas de diferente conductividad. La medición no se lleva a cabo con corriente alterna ya que ésta introduce efectos capacitivos e inductivos, que producirían errores en los resultados.

Ejemplo 18.

Determinar la resistencia de una toma esférica.

SOLUCIÓN

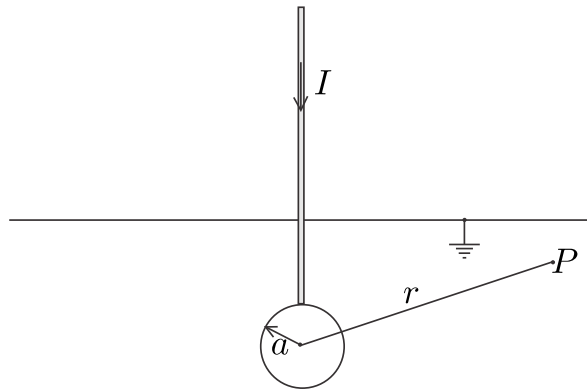


Figura 6.27 Ejemplo 18.

La esfera se considera que está enterrada profundamente. De esta manera el campo a su alrededor es aproximadamente esférico. Mediante un conductor aislado se le hace llegar la corriente.

De la Ec. (6.115) del ejemplo 16, se tiene:

$$\mathbb{J} = \frac{agV_o}{r^2} \vec{a}_r \quad i = \int_S \mathbb{J} \cdot d\mathbb{S} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{agV_o}{r^2} \vec{a}_r \cdot a^2 \sin\theta d\theta d\varphi \vec{a}_r = 4\pi agV_o$$

$$R = \frac{V_o}{i} = \frac{1}{4\pi ag}$$

□

Ejemplo 19.

Calcular la resistencia entre los extremos $\varphi = 0$ y $\varphi = \varphi_o$ del conductor que tiene la forma mostrada en la Fig. 6.28 y sección transversal circular.

SOLUCIÓN

En este caso la solución a la ecuación de Laplace del potencial es:

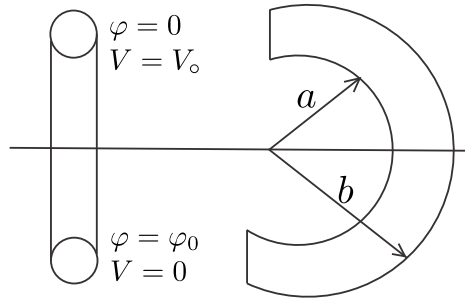


Figura 6.28 Ejemplo 19.

$$V = A\varphi + B \quad (6.127)$$

a. Si $\varphi = 0$ $V = V_o$

$$V_o = A \cdot 0 + B \longrightarrow B = V_o \quad (6.128)$$

Si la Ec. (6.128) se reemplaza en la Ec. (6.127):

$$V = A\varphi + V_o \quad (6.129)$$

b. Si $\varphi = \varphi_o$ $V = 0$

$$0 = A\varphi_o + V_o \longrightarrow A = -\frac{V_o}{\varphi_o} \quad (6.130)$$

Si la Ec. (6.130) se reemplaza en la Ec. (6.129):

$$V = V_{\circ} \left(1 - \frac{\varphi}{\varphi_{\circ}} \right) \quad (6.131)$$

De la Ec. (6.131) se obtiene:

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -\frac{V_{\circ}}{\varphi_{\circ}}$$

$$\mathbb{E} = \frac{V_{\circ}}{r\varphi_{\circ}} \vec{a}_{\varphi} \quad (6.132)$$

$$\mathbb{J} = \frac{\mathbf{g}V_{\circ}}{r\varphi_{\circ}} \vec{a}_{\varphi} \quad (6.133)$$

$$i = \int_S \mathbb{J} \cdot d\mathbb{S} = \int_{a-b}^{a+b} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\mathbf{g}V_{\circ}}{r\varphi_{\circ}} \vec{a}_{\varphi} \cdot dr dz \vec{a}_{\varphi} = \frac{2\pi \mathbf{g}V_{\circ}}{\varphi_{\circ}} \left[a - \sqrt{a^2 - b^2} \right]$$

donde:

$$z_1 = -\sqrt{b^2 - (r-a)^2} \quad \sqrt{b^2 - (r-a)^2}$$

$$R = \frac{\varphi_{\circ}}{2\pi \mathbf{g} \left[a - \sqrt{a^2 - b^2} \right]} \quad (6.134)$$

Ejemplo 20.

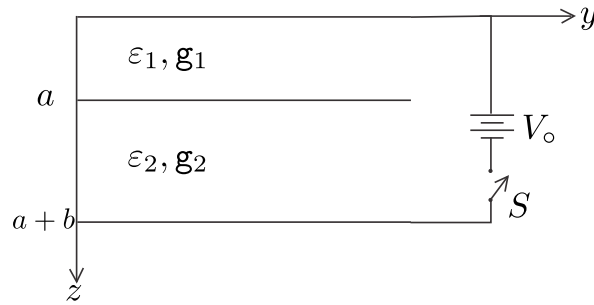


Figura 6.29 Ejemplo 20.

Para el circuito mostrado en la Fig. 6.29, analizar el transitorio del potencial eléctrico, campo eléctrico y densidad superficial de carga en la superficie de separación de los aislantes.

SOLUCIÓN

La solución a la Ecuación de Laplace en $0 \leq z \leq a$ es:

$$V_1 = A_1 z + B_1 \quad \mathbb{E}_1 = -A_1 \vec{a}_z \quad \mathbb{D}_1 = -\varepsilon_1 A_1 \vec{a}_z \quad \mathbb{J}_1 = -\mathbf{g}_1 A_1 \vec{a}_z \quad (6.135)$$

La solución a la Ecuación de Laplace en $a \leq z \leq a + b$ es:

$$V_2 = A_2 z + B_2 \quad \mathbb{E}_2 = -A_2 \vec{a}_z \quad \mathbb{D}_2 = -\varepsilon_2 A_2 \vec{a}_z \quad \mathbb{J}_2 = -\mathbf{g}_2 A_2 \vec{a}_z \quad (6.136)$$

a. $z = 0 \quad V_1 = V_o$

$$V_o = A_1 0 + B_1 \longrightarrow B_1 = V_o \quad (6.137)$$

Por lo tanto:

$$V_1 = A_1 z + V_o \quad (6.138)$$

b. $z = a + b \quad V_2 = 0$

$$0 = A_2 (a + b) + B_2$$

$$B_2 = -A_2 (a + b) \quad (6.139)$$

Si la Ec. (6.139) se sustituye en la Ec. (6.137):

$$V_2 = A_2 [z - (a + b)] \quad (6.140)$$

c. $z = a \quad V_1 = V_2$

$$V_1 = A_1 a + V_o \quad V_2 = A_2 [a - (a + b)] = -b A_2$$

$$A_1 a + V_o = -b A_2 \quad (6.141)$$

d. En $t = 0$, la densidad de carga superficial no puede cambiar instantáneamente, por lo tanto, en $z = a$ $\sigma = 0$. La solución es similar a la de dos dieléctricos, en la cual dos capacitores están conectados en serie sin pérdidas, independientemente de sus conductividades. De las Ecs. (6.135) y (6.136):

$$\sigma = (\mathbb{D}_2 - \mathbb{D}_1) \cdot \vec{a}_z = 0 \quad (6.142)$$

$$\varepsilon_1 A_1 = \varepsilon_2 A_2 \quad (6.143)$$

Si se resuelven simultáneamente las Ecs (6.141) y (6.143), se obtiene:

$$A_1 = -\frac{\varepsilon_2 V_o}{a\varepsilon_2 + b\varepsilon_1} \quad (6.144)$$

$$A_2 = -\frac{\varepsilon_1 V_o}{a\varepsilon_2 + b\varepsilon_1} \quad (6.145)$$

$$V_1 = \left(1 - \frac{\varepsilon_2 z}{a\varepsilon_2 + b\varepsilon_1}\right) V_o \quad (6.146)$$

$$V_2 = \frac{\varepsilon_1 V_o (a + b - z)}{a\varepsilon_2 + b\varepsilon_1} \quad (6.147)$$

$$\mathbb{E}_1 = \frac{\varepsilon_2 V_o}{a\varepsilon_2 + b\varepsilon_1} \vec{a}_z \quad (6.148)$$

$$\mathbb{E}_2 = \frac{\varepsilon_1 V_o}{a\varepsilon_2 + b\varepsilon_1} \vec{a}_z \quad (6.149)$$

$$\mathbb{D}_1 = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 V_o}{a\varepsilon_2 + b\varepsilon_1} \vec{a}_z \quad (6.150)$$

$$\mathbb{D}_2 = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 V_o}{a\varepsilon_2 + b\varepsilon_1} \vec{a}_z \quad (6.151)$$

e. Después que ha transcurrido un tiempo largo, los campos se aproximan a los valores de estado estacionario ya que existe una relación en el tiempo, o sea la componente normal de la densidad de corriente es continua en la entrecara, en este caso la solución es similar a la de los resistores en serie, independientemente de sus permitividades.

En $t \rightarrow \infty$, la densidad de carga superficial no puede cambiar instantáneamente, por lo tanto, en:

$$z = a \quad \sigma = (\mathbb{D}_2 - \mathbb{D}_1) \cdot \vec{a}_z \quad (6.152)$$

$$z = a \quad (\mathbb{J}_2 - \mathbb{J}_1) \cdot \vec{a}_z = 0 \quad (6.153)$$

Si las magnitudes de las Ecs. (6.148) y (6.149) se multiplican por a y b respectivamente y se suman miembro a miembro, se obtiene:

$$E_1 a + E_2 b = V_o \quad (6.154)$$

De la Ec. (6.152):

$$\sigma = \varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1 \quad (6.155)$$

De la Ec. (6.153):

$$\mathbf{g}_1 E_1 = \mathbf{g}_2 E_2 \quad (6.156)$$

Para hallar E_1 , la Ec. (6.154) se multiplica por $\mathbf{g}_2$ y se utiliza la Ec. (6.156) para remplazar $\mathbf{g}_2 E_2$:

$$a \mathbf{g}_2 E_1 + b \mathbf{g}_2 E_2 = \mathbf{g}_2 V_o \quad \longrightarrow \quad a \mathbf{g}_2 E_1 + b \mathbf{g}_1 E_1 = \mathbf{g}_2 V_o$$

$$E_1 = \frac{\mathbf{g}_2 V_o}{a \mathbf{g}_2 + b \mathbf{g}_1} \quad (6.157)$$

Para hallar E_2 , la Ec. (6.154) se multiplica por $\mathbf{g}_1$ y se utiliza la Ec. (6.156) para remplazar $\mathbf{g}_1 E_1$:

$$a \mathbf{g}_1 E_1 + b \mathbf{g}_1 E_2 = \mathbf{g}_1 V_o \quad \longrightarrow \quad a \mathbf{g}_2 E_2 + b \mathbf{g}_1 E_2 = \mathbf{g}_1 V_o$$

$$E_2 = \frac{\mathbf{g}_1 V_o}{a \mathbf{g}_2 + b \mathbf{g}_1} \quad (6.158)$$

$$D_1 = \frac{\varepsilon_1 \mathbf{g}_2 V_o}{a \mathbf{g}_2 + b \mathbf{g}_1} \quad (6.159)$$

$$D_2 = \frac{\varepsilon_2 \mathbf{g}_1 V_o}{a \mathbf{g}_2 + b \mathbf{g}_1} \quad (6.160)$$

De la Ec. (6.152):

$$\sigma = \frac{(\varepsilon_2 \mathbf{g}_1 - \varepsilon_1 \mathbf{g}_2) V_o}{a \mathbf{g}_2 + b \mathbf{g}_1} \quad (6.161)$$

¿Qué ocurre en el transitorio cuando σ aumenta de cero al valor dado por la Ec. (6.158), o sea cuando la Ec. (6.153) no se aplica? Ésta, es una consecuencia de la Ecuación de Continuidad bajo condiciones estacionarias.

Para el caso de variación con el tiempo:

f. En $t = 0$ la densidad de carga superficial no puede cambiar instantáneamente, por lo tanto, en $z = a$ $\sigma = 0$.

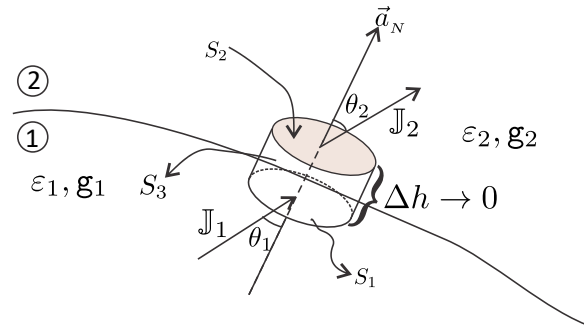


Figura 6.30 Ejemplo 20.

$$\nabla \cdot \mathbb{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbb{J} d\tau + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \rho d\tau = 0$$

$$\oint_S \mathbb{J} \cdot d\mathbb{S} + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = (\mathbb{J}_1 - \mathbb{J}_2) \cdot \vec{a}_N \quad (6.162)$$

Si $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$, entonces de la Ec. (6.162) se obtiene la Ec. (6.153). Si se solucionan simultáneamente las Ecs. (6.154) y Ec. (6.155), se obtienen $E_1 = E_1(\sigma, V_o)$ y $E_2 = E_2(\sigma, V_o)$.

$$E_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_o & b \\ \sigma & \varepsilon_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ -\varepsilon_1 & \varepsilon_2 \end{vmatrix}} = \frac{\varepsilon_2 V_o - b\sigma}{a\varepsilon_2 + b\varepsilon_1} \quad (6.163)$$

$$E_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & V_o \\ -\varepsilon_1 & \sigma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ -\varepsilon_1 & \varepsilon_2 \end{vmatrix}} = \frac{\varepsilon_1 V_o + a\sigma}{a\varepsilon_2 + b\varepsilon_1} \quad (6.164)$$

De la Ec. (6.162), se obtiene:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \mathbf{g}_1 E_1 - \mathbf{g}_2 E_2 \quad (6.165)$$

Si en la (6.165) se remplazan los valores obtenidos en las Ecs. (6.163) y (6.164):

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\frac{a\mathbf{g}_2 + b\mathbf{g}_1}{a\varepsilon_2 + b\varepsilon_1} \sigma + \frac{\varepsilon_2 \mathbf{g}_1 - \varepsilon_1 \mathbf{g}_2}{a\varepsilon_2 + b\varepsilon_1} V_o \quad (6.166)$$

Con el fin de simplificar se define:

$$k_1 = \frac{a\mathbf{g}_2 + b\mathbf{g}_1}{a\varepsilon_2 + b\varepsilon_1} \quad (6.167)$$

$$k_2 = \frac{\varepsilon_2 \mathbf{g}_1 - \varepsilon_1 \mathbf{g}_2}{a\varepsilon_2 + b\varepsilon_1} V_o \quad (6.168)$$

La Ec. (6.166) se solucionará mediante la Transformada de Laplace, ya que se conocen las condiciones iniciales:

$$S \sum(S) - \sigma(0_+) = -k_1 \sum(S) + \frac{k_2}{S} \quad (6.169)$$

Pero $\sigma(0_+) = 0$, por lo tanto:

$$(S + k_1) \sum(S) = \frac{k_2}{S} \quad \sum(S) = \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{1}{S} - \frac{1}{S + k_1} \right)$$

Entonces:

$$\sigma(t) = \frac{k_2}{k_1} (1 - e^{-k_1 t})$$

Pero:

$$\tau = \frac{1}{k_1} = \frac{a\varepsilon_2 + b\varepsilon_1}{a\mathbf{g}_2 + b\mathbf{g}_1} \quad (6.170)$$

$$\sigma(t) = \frac{\varepsilon_2 \mathbf{g}_1 - \varepsilon_1 \mathbf{g}_2}{a \mathbf{g}_2 + b \mathbf{g}_1} V_o \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (6.171)$$

Si $t = 0 : \sigma(t) = 0$ y $t \rightarrow \infty$ la Ec. (6.171) concuerda con la Ec. (6.161).

g. Si se aplica el principio de conservación de la carga en $z = a$ y para :

De la Ec. (6.162):

$$(\mathbb{J}_2 - \mathbb{J}_1) \cdot \vec{a}_N + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbb{D}_2 - \mathbb{D}_1) \cdot \vec{a}_N = 0$$

$$\mathbf{g}_2 \varepsilon_2 - \mathbf{g}_1 \varepsilon_1 + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1) = 0 \quad (6.172)$$

De la Ec. (6.154):

$$E_2 = \frac{V_o - a E_1}{b} \quad (6.173)$$

Si la Ec. (6.173) se remplacea en la Ec. (6.172), se obtiene:

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} + \frac{a \mathbf{g}_2 + b \mathbf{g}_1}{a \varepsilon_2 + b \varepsilon_1} E_1 = \frac{\mathbf{g}_2 V_o}{a \varepsilon_2 + b \varepsilon_1} \quad (6.174)$$

Si en la Ec. (6.174) se tiene en cuenta el valor expresado por la Ec. (6.170):

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} + \frac{E_1}{\tau_1} = \frac{\mathbf{g}_2 V_o}{a \varepsilon_2 + b \varepsilon_1} \quad (6.175)$$

La Ec. (6.175) se solucionará mediante la Transformada de Laplace, ya que las condiciones iniciales se conocen. En $t = 0$, el valor de E_1 está dado por la Ec. (6.148):

$$S \xi_1(S) - E_1(0_+) + \frac{\xi_1(S)}{\tau} = \frac{k}{S}$$

$$\text{Donde: } k = \frac{\mathbf{g}_2 V_o}{a \varepsilon_2 + b \varepsilon_1}$$

$$\xi_1(S) = \left[\frac{k}{S} + E_1(0_+) \right] \frac{1}{\left(S + \frac{1}{\tau} \right)}$$

$$\xi_1(S) = k\tau \left(\frac{1}{S} - \frac{1}{S + \frac{1}{\tau}} \right) + \frac{E_1(0_+)}{\left(S + \frac{1}{\tau} \right)}$$

$$E_1(t) = k\tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) + E_1(0_+) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$E_1(t) = \frac{\mathbf{g}_2 V_o}{a\mathbf{g}_2 + b\mathbf{g}_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) + \frac{\varepsilon_2 V_o}{a\varepsilon_2 + b\varepsilon_1} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6.176)$$

En la Ec. (6.176) si $t \rightarrow \infty$, la solución concuerda con la expresión Ec. (6.157) y si $t \rightarrow 0$, la solución concuerda con la Ec. (6.148).

Si en la Ec. (6.154) se reemplaza en la Ec. (6.173), se obtiene:

$$\frac{\partial E_2}{\partial t} + \frac{a\mathbf{g}_2 + b\mathbf{g}_1}{a\varepsilon_2 + b\varepsilon_1} E_2 = \frac{\mathbf{g}_1 V_o}{a\varepsilon_2 + b\varepsilon_1} \quad (6.177)$$

Si se tiene en cuenta el valor dado por la Ec. (6.170):

$$\frac{\partial E_2}{\partial t} + \frac{E_2}{\tau} = k_1 \quad (6.178)$$

Donde: $k_1 = \frac{\mathbf{g}_1 V_o}{a\varepsilon_2 + b\varepsilon_1}$

La Ec. (6.178) se solucionará mediante la Transformada de Laplace, ya que las condiciones iniciales se conocen. En $t = 0$, el valor de E_2 está dado por la Ec. (6.149):

$$S\xi_2(S) - E_2(0_+) + \frac{\xi_2(S)}{\tau} = \frac{k_1}{S}$$

$$\xi_2(S) = \left[\frac{k_1}{S} + E_2(0_+) \right] \frac{1}{\left(S + \frac{1}{\tau} \right)}$$

$$\xi_2(S) = k_1\tau \left(\frac{1}{S} - \frac{1}{S + \frac{1}{\tau}} \right) + \frac{E_2(0_+)}{\left(S + \frac{1}{\tau} \right)}$$

$$E_2(t) = k_1\tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) + E_2(0_+) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$E_2(t) = \frac{g_1 V_o}{a g_2 + b g_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + \frac{\varepsilon_1 V_o}{a \varepsilon_2 + b \varepsilon_1} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6.179)$$

En la Ec. (6.179) si $t \rightarrow \infty$, la solución concuerda con la Ec. (6.158) y si $t \rightarrow 0$, la solución concuerda con la Ec. (6.149).

En los tiempos iniciales el sistema es puramente capacitivo, o sea, la capacitancia domina, mientras que para los tiempos largos el sistema es puramente resistivo, o sea, la resistencia domina. El tiempo de transición depende de los tiempos de relajación y de la geometría de cada región.

Ejemplo 21.

El circuito equivalente para el sistema mostrado en la Fig. 6.30, se ilustra en la Fig. 6.31, como una combinación serie capacitor - resistor en paralelo para cada región, establecer la relación entre la teoría de campo y de circuitos.

SOLUCIÓN

En la Fig. 6.31, cada región es equivalente a un capacitor - resistor en paralelo.

$$R_1 = \frac{a}{g_1 S} \quad R_2 = \frac{b}{g_2 S} \quad C_1 = \frac{\varepsilon_1 S}{a} \quad C_2 = \frac{\varepsilon_2 S}{b}$$

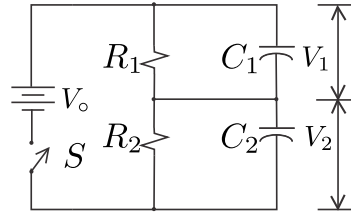


Figura 6.31 Ejemplo 21.

En estado estacionario, de las Ec. (6.157) y (6.158):

$$\int_{V_o}^{V_1} dV = - \int_C \mathbb{E} \cdot \vec{d\ell} = - \int_0^z \mathbb{E} \cdot \vec{dz}$$

$$V_1 = V_o \left[1 - \frac{z g_2}{a g_2 + b g_1} \right] \quad (6.180)$$

$$\int_n^{V_2} dV = - \int_C \mathbb{E} \cdot \vec{d\ell} = - \int_0^z \mathbb{E} \cdot \vec{dz}$$

$$\text{donde } n = \frac{bg_1 V_o}{ag_2 + bg_1}$$

$$V_2 = \frac{V_o g_1}{ag_2 + bg_1} (a + b - z) \quad (6.181)$$

La solución a los campos de estado estacionario, tiene forma idéntica a las de estado inicial si se sustituyen las permitividades de cada región por sus respectivas conductividades.

De la teoría de campos:

$$V_I = V_1(0) - V_2(a) = V_o - \frac{bg_1 V_o}{ag_2 + bg_1} = aE_1 \quad (6.182)$$

$$V_{II} = V_2(a) - V_2(a+b) = \frac{bg_1 V_o}{ag_2 + bg_1} = bE_2 \quad (6.183)$$

$$V_I + V_{II} = V_o \quad (6.184)$$

$$\frac{V_{II}}{V_I} = \frac{R_2}{R_1} \longrightarrow \frac{V_I + V_{II}}{V_I} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = \frac{V_o}{V_I} \longrightarrow V_I = \frac{V_o R_1}{R_1 + R_2}$$

$$V_I = \frac{V_o R_1}{R_1 + R_2} = \frac{\frac{V_o a}{g_1 S}}{\frac{a}{g_1 S} + \frac{b}{g_2 S}} = aE_1 \quad (6.185)$$

$$\frac{V_I}{V_{II}} = \frac{R_1}{R_2} \longrightarrow \frac{V_I + V_{II}}{V_{II}} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = \frac{V_o}{V_{II}} \longrightarrow V_{II} = \frac{V_o R_2}{R_1 + R_2}$$

$$V_{II} = \frac{V_o R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\frac{V_o b}{g_2 S}}{\frac{a}{g_1 S} + \frac{b}{g_2 S}} = bE_2 \quad (6.186)$$

Las Ecs. (6.185) y (6.186) concuerdan con las Ecs. (6.182) y (6.183), por lo tanto, el circuito equivalente mostrado en la Fig. 6.30 representa el de la teoría de campo mostrado en la Fig. 6.31.

Sobre la placa superior del capacitor el existe una carga $-Q_1$. Sobre la placa inferior del capacitor C_2 existe una carga Q_2 . En la Fig. 6.31, la unión entre las placas inferior del capacitor C_2 y la superior del capacitor C_1 representa la entrecara entre los dos aislantes de la Fig. 6.31. La carga neta en la entrecara es:

$$Q_2 - Q_1 = C_2 V_{II} - C_1 V_I \quad (6.187)$$

La Ec. (6.161) expresa la densidad de carga superficial en la entrecara:

$$\sigma S = \frac{\varepsilon_2 \mathbf{g}_1 - \varepsilon_1 \mathbf{g}_2}{a \mathbf{g}_2 + b \mathbf{g}_1} S V_o \quad \sigma S = \frac{\varepsilon_2 S}{b} \frac{b \mathbf{g}_1 V_o}{a \mathbf{g}_2 + b \mathbf{g}_1} - \frac{\varepsilon_1 S}{a} \frac{a \mathbf{g}_2 V_o}{a \mathbf{g}_2 + b \mathbf{g}_1}$$

O sea:

$$Q = C_2 V_{II} - C_1 V_I \quad (6.188)$$

El resultado de la Ec. (6.187) es equivalente al de la Ec. (6.188). La corriente que fluye por el circuito puede obtenerse de la Fig. 6.31:

$$i = \frac{V_o - V_{II}}{R_1} + C_1 \frac{d}{dt} (V_o - V_{II}) = \frac{V_{II}}{R_2} + C_2 \frac{dV_{II}}{dt} \quad (6.189)$$

Ya que V_o es una constante $\frac{\partial V_o}{\partial t} = 0$.

$$(C_1 + C_2) \frac{dV_{II}}{dt} + \frac{V_{II}}{R_1} + \frac{V_{II}}{R_2} = \frac{V_o}{R_1}$$

$$\frac{R_1 R_2 (C_1 + C_2)}{R_1 + R_2} \frac{dV_{II}}{dt} + \frac{V_{II}}{R_1} + V_{II} = \frac{R_2 V_o}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{R_1 R_2 (C_1 + C_2)}{R_1 + R_2} = \frac{\frac{a}{\mathbf{g}_1 S} \frac{b}{\mathbf{g}_2 S} \left(\frac{\varepsilon_1 S}{a} + \frac{\varepsilon_2 S}{b} \right)}{\frac{a}{\mathbf{g}_1 S} + \frac{b}{\mathbf{g}_2 S}} = \frac{S (a \varepsilon_2 + b \varepsilon_1)}{a \mathbf{g}_2 + b \mathbf{g}_1} = \tau$$

$$\tau \frac{dV_{II}}{dt} + V_{II} = \frac{R_2 V_o}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{dV_{II}}{dt} + \frac{V_{II}}{\tau} = \frac{R_2 V_o}{\tau (R_1 + R_2)} \quad (6.190)$$

La Ec. (6.190) se solucionará mediante la Transformada de Laplace, ya que las condiciones iniciales son conocidas:

$$\text{En } t \rightarrow 0 \quad V_{II} = \frac{V_o C_1}{C_1 + C_2}$$

$$S v_{II}(S) - V_{II}(0_+) + \frac{v_{II}(S)}{\tau} = \frac{k_3}{S}$$

$$k_3 = \frac{R_2 V_o}{\tau(R_1 + R_2)} \quad \tau k_3 = \frac{R_2 V_o}{R_1 + R_2}$$

$$v_{II}(S) = \frac{V_{II}(0_+)}{S + \frac{1}{\tau}} + \tau k_3 \left(\frac{1}{S} - \frac{1}{S + \frac{1}{\tau}} \right)$$

$$V_{II}(t) = V_{II}(0_+) e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{R_2 V_o}{R_1 + R_2} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$V_{II}(t) = \frac{R_1 C_1 V_o}{R_1(C_1 + C_2)} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{R_2 V_o}{R_1 + R_2} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Si $\tau = R_1 C_1$, entonces:

$$V_{II}(t) = \frac{R_2 V_o}{R_1 + R_2} \left(1 - \frac{\tau - \tau_1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (6.191)$$

De la Ec. (6.184):

$$V_I = V_o - V_{II}$$

Por lo tanto:

$$V_I(t) = \frac{R_1 V_o}{R_1 + R_2} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \frac{\tau - \tau_1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (6.192)$$

Si $\tau \rightarrow \infty$, las Ecs. (6.191) y (6.192) concuerdan con las estacionarias, las cuales están expresadas por las Ecs. (6.185) y (6.187), respectivamente.

Ejemplo 22.

Un cilindro muy largo de radio a , permitividad ε_1 y conductividad $\mathbf{g}_1$ se coloca en un medio permitividad ε_2 y conductividad $\mathbf{g}_2$. Un campo eléctrico $\mathbb{E} = E_o \vec{a}_x$, se aplica a una distancia muy alejada en $t = 0$. Hallar la densidad de carga superficial en la entrecara.

SOLUCIÓN

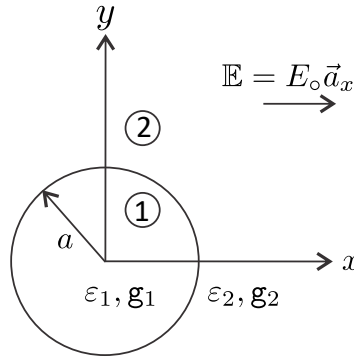


Figura 6.32 Ejemplo 22.

$$V_1 = \left(A_1 r + \frac{B_1}{r} \right) (C_1 \cos \varphi + D_1 \sin \varphi) \quad (6.193)$$

$$V_2 = \left(A_2 r + \frac{B_2}{r} \right) (C_2 \cos \varphi + D_2 \sin \varphi) \quad (6.194)$$

a. $r \rightarrow 0$ $V_1 = V_o$ es finito

$$V_o = \left(A_1 0 + \frac{B_1}{0} \right) (C_1 \cos \varphi + D_1 \sin \varphi)$$

Para que se satisfaga la condición de frontera:

$$B_1 = 0 \quad (6.195)$$

Si el valor de la Ec. (6.195), se remplaza en la Ec. (6.193):

$$V_1 = A_1 (C_1 \cos \varphi + D_1 \sin \varphi) r \quad (6.196)$$

Se redefine:

$$A = A_1 C_1 \quad B = A_1 D_1$$

Por lo tanto, para la Ec. (6.196) se tiene:

$$V_1 = (A \cos \varphi + B \sin \varphi) r = A r \cos \varphi + B r \sin \varphi \quad (6.197)$$

b. $r \rightarrow \infty$ $\mathbb{E}_2 = E_o \vec{a}_x = -\frac{dV_2}{dx} \vec{a}_x$

$$dV_2 = -E_o dx \quad V_2 = -E_o x + k$$

Si se remplace el valor correspondiente de x en coordenadas cilíndricas, se tiene:

$$V_2 = -E_o r \cos \varphi + k \quad (6.198)$$

También:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V_2 = \left(A_2 \infty + \frac{B_2}{\infty} \right) (C_2 \cos \varphi + D_2 \sin \varphi) = A_2 (C_2 \cos \varphi + D_2 \sin \varphi) r \quad (6.199)$$

Se redefine:

$$C = A_2 C_2 \quad F = A_2 D_2$$

Por lo tanto, para la Ec. (6.199) se tiene:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V_2 = (C \cos \varphi + F \sin \varphi) r \quad (6.200)$$

Al igualar las Ecs. (6.198) y (6.200), se tiene:

$$-E_o r \cos \varphi + k = C r \cos \varphi + F r \sin \varphi$$

De la Ec. (6.190) se concluye: $k = 0 \quad C = -E_o \quad F = 0$.

Por lo tanto: $A_2 \neq 0 \quad D_2 = 0$. La Ec. (6.194) se puede reescribir como:

$$V_2 = \left(A_2 r + \frac{B_2}{r} \right) C_2 \cos \varphi \quad (6.201)$$

De donde $C = A_2 C_2 = -E_o$ y se redefine $F = B_2 C_2$, por lo tanto para la ecuación anterior, se tiene:

$$V_2 = \left(-E_o r + \frac{G}{r} \right) \cos \varphi = \left(-E_o + \frac{G}{r^2} \right) r \cos \varphi \quad (6.202)$$

$$c. \quad r = a \quad V_1 = V_2$$

$$V_1 = (A \cos \varphi + B \sin \varphi) a = A a \cos \varphi + B a \sin \varphi$$

$$V_2 = \left(-E_o a + \frac{G}{a} \right) \cos \varphi = \left(-E_o + \frac{G}{a^2} \right) a \cos \varphi$$

$$A \cos \varphi + B \sin \varphi = \left(-E_o + \frac{G}{a^2} \right) a \cos \varphi$$

De donde se concluye: $B = 0$ y

$$A = -E_o + \frac{G}{a^2} \quad (6.203)$$

para $\forall \cos \varphi \neq 0$.

La Ec. (6.190), finalmente adopta la siguiente forma:

$$V_1 = A \cos \varphi \quad (6.204)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial r} = A \cos \varphi \quad \frac{1}{r} \frac{\partial V_1}{\partial \varphi} = -A \sin \varphi$$

El campo eléctrico se obtiene a partir del gradiente negativo del potencial eléctrico:

$$\mathbb{E}_1 = -A (\cos \varphi \vec{a}_r - \sin \varphi \vec{a}_\varphi) = -A \vec{a}_z \quad (6.205)$$

$$\mathbb{D}_1 = -A \varepsilon_1 (\cos \varphi \vec{a}_r - \sin \varphi \vec{a}_\varphi) = -A \varepsilon_1 \vec{a}_z \quad (6.206)$$

De la Ec. (6.202), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_2}{\partial r} &= - \left(E_o + \frac{G}{r^2} \right) \cos \varphi & \frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial \varphi} &= - \left(-E_o + \frac{G}{r^2} \right) \sin \varphi \\ \mathbb{E}_2 &= \left(E_o + \frac{G}{r^2} \right) \cos \varphi \vec{a}_r + \left(-E_o + \frac{G}{r^2} \right) \sin \varphi \vec{a}_\varphi \end{aligned} \quad (6.207)$$

$$\mathbb{D}_2 = \varepsilon_2 \left(E_o + \frac{G}{r^2} \right) \cos \varphi \vec{a}_r + \varepsilon_2 \left(-E_o + \frac{G}{r^2} \right) \sin \varphi \vec{a}_\varphi \quad (6.208)$$

e. Para $r = a$ $t = 0$, la densidad de carga superficial no puede cambiar instantáneamente, por lo tanto $\sigma = 0$.

$$\sigma = (\mathbb{D}_2 - \mathbb{D}_1) \cdot \vec{a}_r = 0$$

$$\varepsilon_2 \left(E_o + \frac{G}{a^2} \right) \cos \varphi + A \varepsilon_1 \cos \varphi = 0$$

Si $\cos \varphi \neq 0$:

$$Aa^2\varepsilon_1 + a^2\varepsilon_2 E_o + \varepsilon_2 G = 0 \quad (6.209)$$

Al solucionar las Ecs. (6.203) y (6.209) se obtiene:

$$G = \frac{a^2 E_o (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \quad (6.210)$$

$$A = -\frac{2\varepsilon_2 E_o}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \quad (6.211)$$

De las Ecs. (6.193) y (6.194):

$$V_1 = -\frac{2\varepsilon_2 E_o}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cos\varphi \quad \square$$

$$\mathbb{E}_1 = \frac{2\varepsilon_2 E_o}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} (\cos\varphi \vec{a}_r - \sin\varphi \vec{a}_\varphi) = \frac{2\varepsilon_2 E_o}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \vec{a}_z \quad \square$$

$$\mathbb{D}_1 = \frac{2\varepsilon_1 \varepsilon_2 E_o}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} (\cos\varphi \vec{a}_r - \sin\varphi \vec{a}_\varphi) = \frac{2\varepsilon_1 \varepsilon_2 E_o}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \vec{a}_z \quad \square$$

$$V_2 = -\left[1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right] E_o r \cos\varphi \quad \square$$

$$\mathbb{E}_2 = \left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right] E_o \cos\varphi \vec{a}_r + \left[-1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right] E_o \sin\varphi \vec{a}_\varphi \quad \square$$

$$\mathbb{D}_2 = \left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right] \varepsilon_2 E_o \cos\varphi \vec{a}_r + \left[-1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right] \varepsilon_2 E_o \sin\varphi \vec{a}_\varphi \quad \square$$

La solución a los campos de estado estacionario es de forma idéntica a los de estado inicial, si las permitividades de cada región se sustituyen por sus conductividades respectivas, conclusión que se obtuvo en el ejemplo 20.

f. En $r = a \quad t \rightarrow \infty$:

$$(\mathbb{J}_2 - \mathbb{J}_1) \cdot \vec{a}_r = 0$$

$$\mathbb{E}_1 = \frac{2\mathbf{g}_2 E_o}{\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2} (\cos\varphi \vec{a}_r - \sin\varphi \vec{a}_\varphi) = \frac{2\mathbf{g}_2 E_o}{\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2} \vec{a}_z \quad \square$$

$$\mathbb{D}_1 = \frac{2\varepsilon_1 \mathbf{g}_2 E_o}{\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2} (\cos\varphi \vec{a}_r - \sin\varphi \vec{a}_\varphi) = \frac{2\varepsilon_1 \mathbf{g}_2 E_o}{\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2} \vec{a}_z \quad \square$$

$$\mathbb{E}_2 = \left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2}{\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2}\right] E_o \cos\varphi \vec{a}_r + \left[-1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2}{\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2}\right] E_o \sin\varphi \vec{a}_\varphi \quad \square$$

$$\mathbb{D}_2 = \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \frac{\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2}{\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2} \right] \varepsilon_2 E_o \cos \varphi \vec{a}_r + \left[-1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \frac{\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2}{\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2} \right] \varepsilon_2 E_o \sin \varphi \vec{a}_\varphi \quad \square$$

$$\sigma = (\mathbb{D}_2 - \mathbb{D}_1) \cdot \vec{a}_r$$

$$\sigma = \frac{2E_o \cos \varphi}{\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2} (\varepsilon_2 \mathbf{g}_1 - \varepsilon_1 \mathbf{g}_2) \quad \square$$

Ejemplo 23.

Una esfera conductora de radio a , permitividad ε_1 y conductividad $\mathbf{g}_1$ está colocada dentro de un medio de permitividad ε_2 y conductividad $\mathbf{g}_2$. Un campo eléctrico $\mathbb{E} = E_o \vec{a}_z$ se aplica a una distancia muy alejada del sistema. Hallar la densidad de carga superficial en la entrecara.

SOLUCIÓN

La solución a la ecuación de Laplace del potencial en este caso es:

$$V_1 = \left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2} \right) \cos \theta \quad (6.212)$$

$$V_2 = \left(A_2 r + \frac{B_2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (6.213)$$

a. $r \rightarrow 0 \quad V_1 = V_o$ es finito

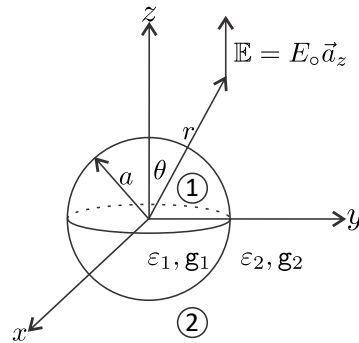


Figura 6.33 Ejemplo 23.

De la Ec.(6.212):

$$V_o = \left(A_1 0 + \frac{B_1}{0} \right) \cos\theta$$

por lo tanto

$$B_1 = 0 \quad (6.214)$$

De este modo, la Ec. (6.212) toma la siguiente forma:

$$V_1 = A_1 r \cos\theta \quad (6.215)$$

$$\text{b. } r \rightarrow \infty \quad \mathbb{E}_2 = E_o \vec{a}_z$$

El potencial eléctrico en un punto muy alejado del conductor esférico no es cero:

$$E_o \vec{a}_z = -\frac{dV_2}{dz} \vec{a}_z \quad dV_2 = -E_o dz \quad V_2 = -E_o z + k$$

Si se reemplaza el valor correspondiente de z en coordenadas esféricas, se tiene:

$$V_2 = -E_o r \cos\theta + k \quad (6.216)$$

De la Ec. (6.213):

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V_2 = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(A_2 r + \frac{B_2}{r^2} \right) \cos\theta = A_2 r \cos\theta \quad (6.217)$$

Al igualar las Ecs. Ec. (6.216) y Ec. (6.217):

$$-E_o r \cos\theta + k = A_2 r \cos\theta \quad (6.218)$$

Se concluye que:

$$k = 0 \quad A_2 = -E_o \quad \forall \cos\theta \neq 0$$

entonces:

$$V_2 = \left(-E_o r + \frac{B_2}{r^2} \right) \cos\theta = \left(-E_o + \frac{B_2}{r^3} \right) r \cos\theta \quad (6.219)$$

$$\text{c. } r = a \quad V_1 = V_2$$

$$V_1 = A_1 a \cos\theta \quad V_2 = \left(-E_o + \frac{B_2}{a^3} \right) a \cos\theta$$

$$A_1 a \cos \theta = \left(-E_o + \frac{B_2}{a^3} \right) a \cos \theta$$

$$A_1 = -E_o + \frac{B_2}{a^3} \quad \forall \quad \cos \varphi \neq 0$$

$$a^3 A_1 = -a^3 E_o + B_2 \quad (6.220)$$

El campo eléctrico en el interior de la esfera se obtiene de la Ec. (6.212):

$$\frac{\partial V_1}{\partial r} = A_1 \cos \theta \quad \frac{1}{r} \frac{\partial V_1}{\partial \theta} = -A_1 \sin \theta$$

$$\mathbb{E}_1 = A_1 (-\cos \theta \vec{a}_r + \sin \theta \vec{a}_\theta) = -A_1 \vec{a}_z \quad (6.221)$$

La densidad de corriente en el interior de la esfera es:

$$\mathbb{J}_1 = g_1 A_1 (-\cos \theta \vec{a}_r + \sin \theta \vec{a}_\theta) = -g_1 A_1 \vec{a}_z \quad (6.222)$$

El campo eléctrico en el exterior de la esfera es:

$$\frac{\partial V_2}{\partial r} = -\left(E_o + \frac{2B_2}{r^3} \right) \cos \theta \quad \frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial \theta} = -\left(E_o + \frac{B_2}{r^3} \right) \sin \theta$$

$$\mathbb{E}_2 = \left(E_o + \frac{2B_2}{r^3} \right) \cos \theta \vec{a}_r + \left(-E_o + \frac{B_2}{r^3} \right) \sin \theta \vec{a}_\theta \quad (6.223)$$

La densidad de corriente en el exterior de la esfera es:

$$\mathbb{J}_2 = \left(E_o + \frac{2B_2}{r^3} \right) g_2 \cos \theta \vec{a}_r + \left(-E_o + \frac{B_2}{r^3} \right) g_2 \sin \theta \vec{a}_\theta \quad (6.224)$$

$$\text{d. } r = a \quad J_{1r} = J_{2r}$$

$$-g_1 A_1 \cos \theta = \left(E_o + \frac{2B_2}{a^3} \right) g_2 \cos \theta$$

$$-a^3 g_1 A_1 = a^3 g_2 E_o + 2g_2 B_2 \quad (6.225)$$

Si se solucionan las Ecs. (6.220) y (6.225), se obtiene:

$$A_1 = -\frac{3g_2 E_o}{g_1 + 2g_2} \quad (6.226)$$

$$B_2 = \frac{(\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2) a^3 E_o}{\mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_2} \quad (6.227)$$

En la Ec. (6.215) se remplaza el valor obtenido en la Ec. (6.226):

$$V_1 = -\frac{3\mathbf{g}_2 E_o}{\mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_2} r \cos \theta \quad (6.228)$$

$$V_2 = \left[-r + \frac{\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2}{\mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_2} \frac{a^3}{r^2} \right] E_o \cos \theta = \left[-1 + \frac{\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2}{\mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] E_o r \cos \theta \quad (6.229)$$

$$\mathbb{E}_1 = \frac{3\mathbf{g}_2 E_o}{\mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_2} (\cos \theta \vec{a}_r - \sin \theta \vec{a}_\theta) = \frac{3\mathbf{g}_2 E_o}{\mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_2} \vec{a}_z \quad (6.230)$$

$$\mathbb{D}_1 = \frac{3\varepsilon_1 \mathbf{g}_2 E_o}{\mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_2} (\cos \theta \vec{a}_r - \sin \theta \vec{a}_\theta) = \frac{3\varepsilon_1 \mathbf{g}_2 E_o}{\mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_2} \vec{a}_z \quad (6.231)$$

$$\mathbb{E}_2 = \left[1 + 2 \frac{\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2}{\mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] E_o \cos \theta \vec{a}_r + \left[-1 + \frac{\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2}{\mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] E_o \sin \theta \vec{a}_\theta \quad (6.232)$$

$$\mathbb{D}_2 = \left[1 + 2 \frac{\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2}{\mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] \varepsilon_2 E_o \cos \theta \vec{a}_r + \left[-1 + \frac{\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2}{\mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] \varepsilon_2 E_o \sin \theta \vec{a}_\theta \quad (6.233)$$

e. En $r = a$ $\sigma = (\mathbb{D}_2 - \mathbb{D}_1) \cdot \vec{a}_r$

$$\begin{aligned} \sigma &= \left[1 + 2 \frac{\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2}{\mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_2} \right] \varepsilon_2 E_o \cos \theta + \frac{3\varepsilon_1 \mathbf{g}_2 E_o}{\mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_2} \cos \theta \\ \sigma &= \frac{3E_o \cos \theta}{\mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_2} (\varepsilon_2 \mathbf{g}_1 - \varepsilon_1 \mathbf{g}_2) \end{aligned} \quad (6.234)$$

I. ANÁLISIS DE LA ESFERA DIELÉCTRICA.

Si $\mathbf{g}_1 = 0$, la esfera es un dieléctrico.

De la Ec. (6.228), se obtiene:

$$V_1 = -\frac{3\mathbf{g}_2 E_o}{0 + 2\mathbf{g}_2} r \cos \theta = -\frac{3}{2} E_o r \cos \theta \quad (6.235)$$

De la Ec. (6.229), se obtiene:

$$V_2 = \left[-r + \frac{0 - \mathbf{g}_2}{0 + 2\mathbf{g}_2} \frac{a^3}{r^2} \right] E_o \cos \theta = - \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] E_o r \cos \theta \quad (6.236)$$

De la Ec. (6.230) se obtiene:

$$\mathbb{E}_1 = \frac{3\mathbf{g}_2 E_o}{0 + 2\mathbf{g}_2} \vec{a}_z = \frac{3}{2} E_o \vec{a}_z \quad (6.237)$$

De la Ec. (6.232) se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_2 &= \left[1 + 2 \frac{0 - \mathbf{g}_2}{0 + 2\mathbf{g}_2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] E_o \cos \theta \vec{a}_r + \left[-1 + \frac{0 - \mathbf{g}_2}{0 + 2\mathbf{g}_2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] E_o \sin \theta \vec{a}_\theta \\ \mathbb{E}_2 &= \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] E_o \cos \theta \vec{a}_r - \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] E_o \sin \theta \vec{a}_\theta \end{aligned} \quad (6.238)$$

II. ANÁLISIS DE LA ESFERA CONDUCTORA.

Si $\mathbf{g}_1 \rightarrow \infty$, la esfera es un conductor perfecto.

De la Ec. (6.228), se obtiene:

$$V_1 = -\frac{3\mathbf{g}_2 E_o}{\infty + 2\mathbf{g}_2} r \cos \theta = 0 \quad (6.239)$$

De la Ec. (6.229), se obtiene:

$$V_2 = \left[-r + \frac{\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2}{\mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_2} \frac{a^3}{r^2} \right] E_o \cos \theta = \left[-1 + \frac{\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2}{\mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] E_o r \cos \theta \quad (6.240)$$

$$\lim_{g_1 \rightarrow \infty} \frac{g_1 - g_2}{g_1 + 2g_2} = \lim_{g_1 \rightarrow \infty} \frac{g_1 - g_2}{g_1 + 2g_2} = \lim_{g_1 \rightarrow \infty} \frac{g_1 \left(1 - \frac{g_2}{g_1}\right)}{g_1 \left(1 + 2\frac{g_2}{g_1}\right)} = 1$$

$$\lim_{g_1 \rightarrow \infty} V_2 = \left[-1 + \left(\frac{a}{r}\right)^3\right] E_o r \cos \theta \quad \square$$

De la Ec. (6.230) se obtiene:

$$\mathbb{E}_1 = \frac{3g_2 E_o}{\infty + 2g_2} \vec{a}_z = 0 \quad (6.241)$$

De la Ec. (6.232) se obtiene:

$$\mathbb{E}_2 = \left[1 + 2\frac{g_1 - g_2}{g_1 + 2g_2} \left(\frac{a}{r}\right)^3\right] E_o \cos \theta \vec{a}_r + \left[-1 + \frac{g_1 - g_2}{g_1 + 2g_2} \left(\frac{a}{r}\right)^3\right] E_o \sin \theta \vec{a}_\theta \quad (6.242)$$

$$\lim_{g_1 \rightarrow \infty} \mathbb{E}_2 = \left[1 + 2\left(\frac{a}{r}\right)^3\right] E_o \cos \theta \vec{a}_r + \left[-1 + \left(\frac{a}{r}\right)^3\right] E_o \sin \theta \vec{a}_\theta \quad \square$$

CONCLUSIONES.

1. La carga total sobre la esfera es cero en cada punto de la esfera, si en la Ec. (6.234): $\varepsilon_2 g_1 - \varepsilon_1 g_2$, o sea $\frac{\varepsilon_1}{g_1} = \frac{\varepsilon_2}{g_2}$, o también $\tau_1 = \tau_2$. Lo anterior, significa que los tiempos de relajación deben ser iguales.
2. El campo eléctrico en el interior de la esfera es constante.
3. De acuerdo a la Ec. (6.232), el campo eléctrico en el exterior de la esfera se puede reescribir así:

$$\mathbb{E}_2 = E_o \vec{a}_z + \left(\frac{a}{r}\right)^3 \frac{g_1 - g_2}{g_1 + 2g_2} E_o (2\cos \theta \vec{a}_r + \sin \theta \vec{a}_\theta) \quad (6.243)$$

O sea, el campo eléctrico en el exterior de la esfera es la superposición del campo externo más el de la esfera que se comporta como un dipolo eléctrico.

6.15. Problemas.

Problema 1.

Hallar la corriente total en la dirección $\vec{a}_x$ que cruza el plano $z = 0$, entre $x \pm 0,01 [m]$ y $y = \pm 0,01 [m]$ si:

a. $\mathbb{J} = 2 \times 10^8 (z^2 \vec{a}_y + y^2 \vec{a}_z) \left[\frac{A}{m^2} \right]$

b. $\mathbb{J} = 2 \times 10^8 (x^2 + y^2) \vec{a}_z \left[\frac{A}{m^2} \right]$

Problema 2.

Una cuña en coordenadas cilíndricas se define por $0,1 \leq r \leq 10 [cm]$, $85^\circ \leq \theta \leq 95^\circ$ y $-2 \leq z \leq 2 [cm]$. Cuál es la resistencia total medida entre las dos superficies $\varphi = k$ si todas las superficies equipotenciales se describen por $\varphi = k$? $g = 2 \left[\frac{1}{\Omega m} \right]$.

Problema 3.

Un alambre de cobre largo de radio a , se coloca tenso y a una distancia h paralelamente a una placa de cobre muy grande. La región que está por encima de la placa y rodea al alambre se llena con un medio de conductividad g . Demostrar que la resistencia eléctrica entre los dos electrodos de cobre, por unidad de longitud de

alambre, está dada por: $R = \frac{\operatorname{arccosh} \left(\frac{h}{a} \right)}{2\pi g}$

Problema 4.

Una esfera homogénea, isotrópica, de conductividad g está sujeta a un potencial $V_0 \cos \theta$ en todos los puntos de la superficie. Hallar la densidad de corriente $\mathbb{J}$ en todos los puntos interiores de la esfera.

Problema 5.

Una placa cuadrada de cobre de longitud $20a$, espesor t y conductividad g está sometida a una diferencia de potencial: dos bordes opuestos de la placa se mantienen a los potenciales V_0 y $-V_0$ respectivamente.

- ¿Cuál es la resistencia eléctrica de la placa?
- Se hace un pequeño orificio de radio a en el centro de la placa. Determinar el cambio fraccionario aproximado en la placa con la ayuda de armónicos cilíndricos $\cos\theta$. Desafortunadamente, esta distribución no es bastante correcta, porque los dos bordes opuestos del cuadrado no son equipotenciales exactos. Una solución aproximada se obtiene tomando el potencial medio de los dos bordes igual a $\pm V_0$.

Problema 6.

Seis resistores idénticos R se unen para formar un hexágono. Seis resistores más, nuevamente con la misma resistencia R , se conectan entre los seis vértices y el centro del hexágono.

- ¿Cuál es la resistencia equivalente entre los vértices opuestos?
- ¿Cuál es la resistencia equivalente entre los vértices adyacentes?

Problema 7.

Un grupo de N pilas idénticas con voltaje de circuito abierto V_0 y resistencia interna r se utiliza para suministrar corriente a un resistor de carga R . Demostrar que si las N pilas se conectan en serie entre sí y con R , entonces $I = \frac{NV_0}{R + Nr}$, mientras que si las pilas se conectan en paralelo y esta combinación se conecta en serie con R , entonces $I = \frac{V_0}{R + \frac{r}{N}}$.

Problema 8.

La resistencia de fuga de un cable aislador de caucho se mide de la siguiente manera: una longitud L del cable aislado se sumerge en una solución de agua de sal, se aplica una diferencia de potencial entre el cable conductor y la solución, y se

mide la corriente resultante en el cable. En un caso particular, se sumergen 3 [m] de cable en la solución; con 200 [V] entre el cable conductor y la solución, la corriente medida es de $2 \times 10^{-3}\text{ [A]}$. El espesor del aislante igual al radio del conductor central. ¿Cuál es la resistividad eléctrica del aislante?

Problema 9.

Una bombilla de lámpara de $0,4\text{ [W]}$ se diseña para que trabaje con 2 [V] entre sus terminales. Una resistencia R se coloca en paralelo con la bombilla y la combinación se coloca en serie con un resistor de $3\text{ [}\Omega\text{]}$ y una batería de 3 [V] , resistencia interna $\frac{1}{3}\text{ [}\Omega\text{]}$. ¿Cuál deberá ser el valor de R si la lámpara ha de funcionar al voltaje diseñado?

Problema 10.

Una línea de resistencias, de resistencia total NR se conecta entre el potencial V_0 y tierra (tierra es el potencial de referencia). La línea está sostenida por $N - 1$ postes colocados a intervalos iguales de resistencia, de tal forma que la resistencia entre polos es R . La resistencia de fuga a tierra en cada poste es βR . Si V_m es el potencial en el m -ésimo poste, demostrar que: $V_{m+1} - (2 + \beta^{-1})V_m + V_{m-1} = 0$.

Problema 11.

Seis resistores forman los lados de un tetraedro. Cinco de los resistores son idénticos R , el sexto es R_1 . Se aplica una diferencia de potencial a través de uno de los resistores adyacentes a R_1 . Demostrar que la producción de calor por efecto Joule en R_1 es máxima cuando $R_1 = \frac{3R}{5}$.

Problema 12.

Una esfera grande de conductividad uniforme g y permitividad ε tiene radio R . En $t = 0$, una carga Q se coloca uniformemente sobre una superficie esférica pequeña concéntrica de radio a , $a > R$. Hallar las pérdidas por efecto Joule durante el transitorio y demostrar que es igual a la disminución de energía eléctrica almacenada.

Problema 13.

- a. La mitad de anillo de la Fig. 6.34 tiene un material de conductividad g . Hallar la resistencia entre A y B mediante un tratamiento riguroso (radio interior R y exterior $r + d$).
- b. Hallar la resistencia total al suponer que sea una línea con longitud igual a π veces el radio medio. Para $r \gg d$, demostrar que el literal a se reduce al b .

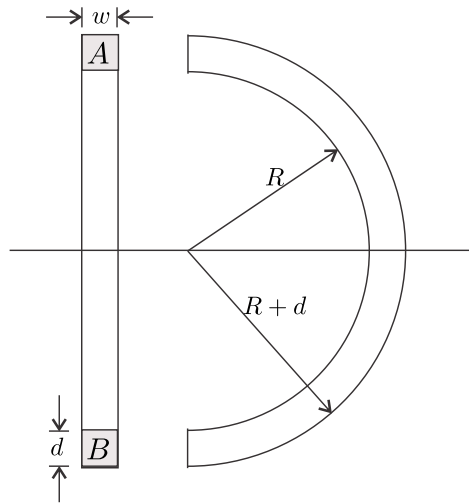


Figura 6.34 Problema 13.

Apéndice A

COORDENADAS CURVILÍNEAS ORTOGONALES I.

A.1. Coordenadas cilíndricas

Se usan en teoría de campos electromagnéticos debido a la simetría de propagación que se da en líneas de transmisión y conductores.

El punto de coordenadas (x, y, z) se puede representar como un punto de coordenadas (r, φ, z)

$$\mathbb{R} = r \cos \varphi \vec{a}_x + r \sin \varphi \vec{a}_y + z \vec{a}_z \quad (\text{A.1})$$

$r : r \in [0, \infty]$ distancia perpendicular de cualquier punto del espacio al eje z .

$\varphi : \varphi \in [0, 2\pi]$ ángulo con respecto a Ox

$z : z \in \mathbb{R}$ elevación sobre el plano xy .

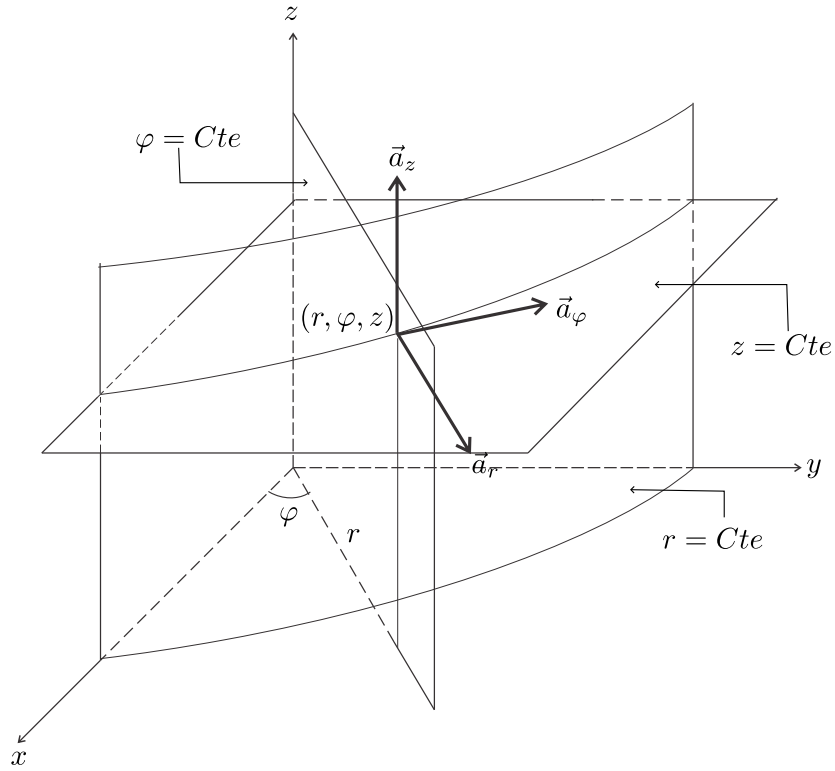


Figura A.1 Coordenadas cilíndricas

A.1.1. Vectores unitarios.

$$\vec{a}_{u_i} = \frac{\frac{\partial \mathbb{R}}{\partial u_i}}{\frac{\partial \mathbb{R}}{\partial u_i}} \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial \mathbb{R}}{\partial r} = \cos \varphi \vec{a}_x + \sin \varphi \vec{a}_y \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial R}{\partial r} = [\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi]^{\frac{1}{2}} = 1 \quad (\text{A.4})$$

$$\vec{a}_r = \cos \varphi \vec{a}_x + \sin \varphi \vec{a}_y \quad (\text{A.5})$$

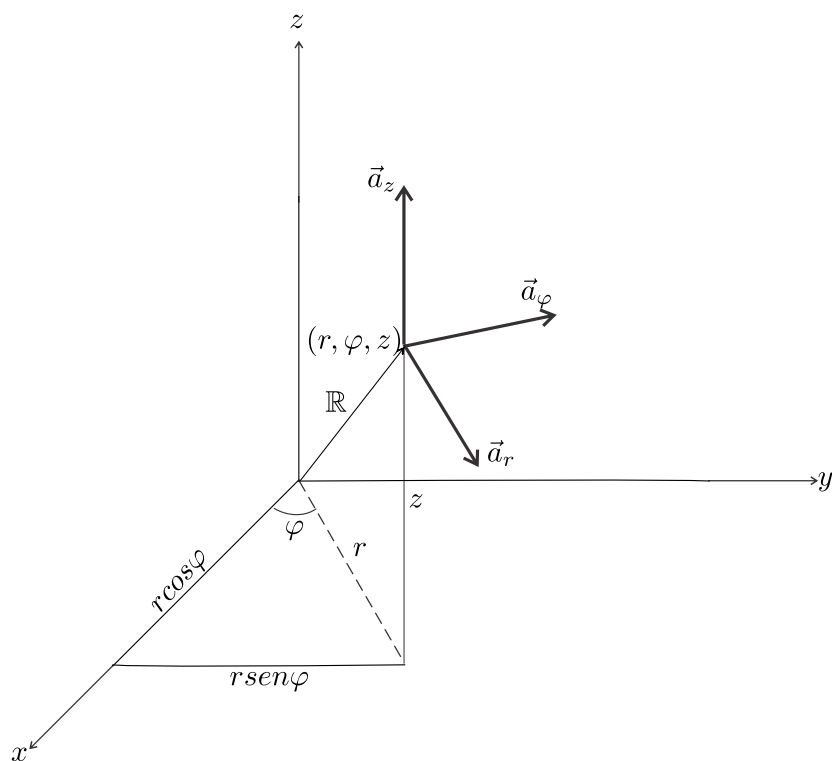


Figura A.2 Punto en coordenadas cilíndricas

$$\frac{\partial \mathbb{R}}{\partial \varphi} = r(-\text{sen} \varphi \vec{a}_x + \cos \varphi \vec{a}_y) \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial R}{\partial \varphi} = \left[r^2 (\text{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \right]^{\frac{1}{2}} = r \quad (\text{A.7})$$

$$\vec{a}_\varphi = -\text{sen} \varphi \vec{a}_x + \cos \varphi \vec{a}_y \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial \mathbb{R}}{\partial z} = \vec{a}_z \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = 1 \quad (\text{A.10})$$

$$\vec{a}_z = \vec{a}_z \quad (\text{A.11})$$

A.2. Coordenadas esféricas.

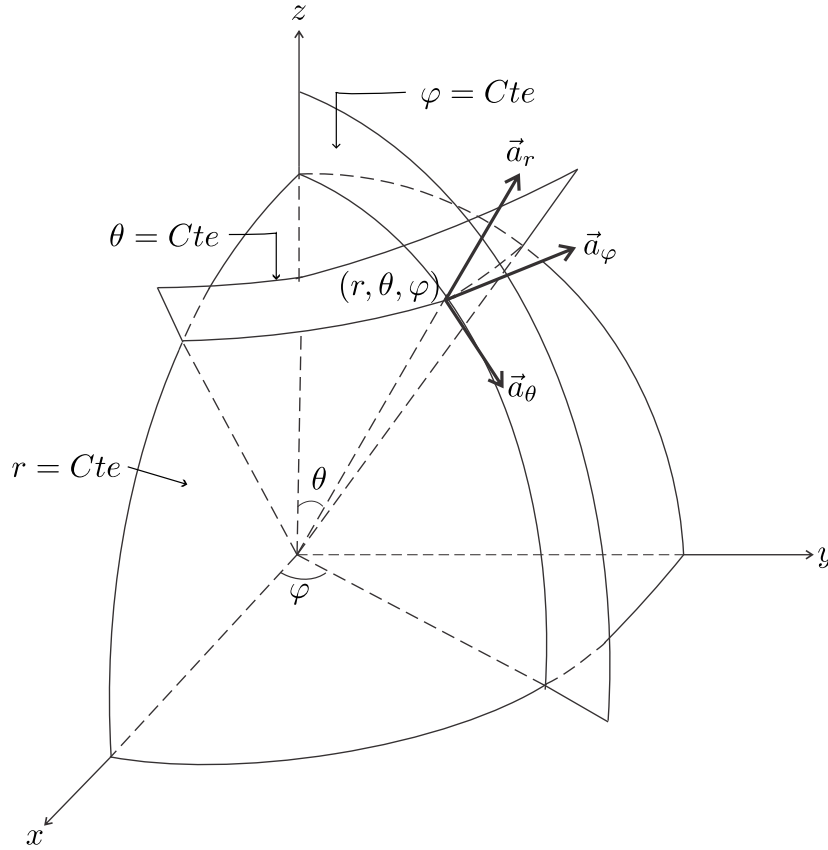


Figura A.3 Coordenadas esféricas.

El punto de coordenadas (x, y, z) se puede representar como un punto de coordenadas (r, θ, φ)

$$\mathbb{R} = r \sin \theta \cos \varphi \vec{a}_x + r \sin \theta \sin \varphi \vec{a}_y + r \cos \theta \vec{a}_z \quad (\text{A.12})$$

$r : r \in [0, \infty]$ distancia del origen hasta el punto dado.

$\theta : \theta \in [0, \pi]$ ángulo del punto dado con respecto a Oz.

$\varphi : \varphi \in [0, 2\pi]$ ángulo del punto dado con respecto al plano xy

A.2.1. Vectores unitarios.

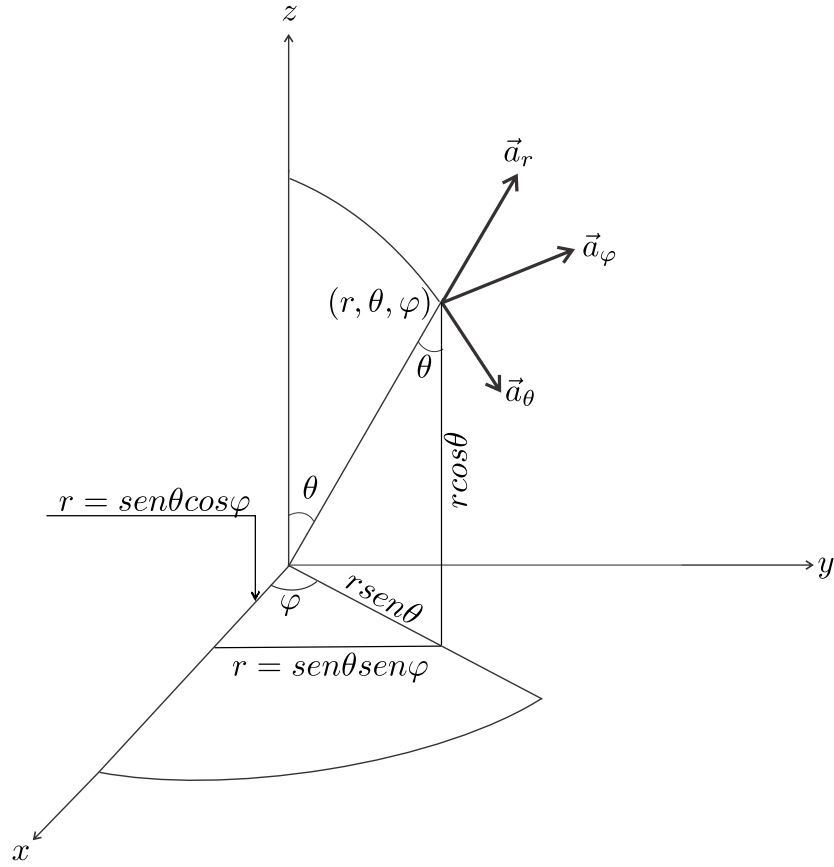


Figura A.4 Punto en coordenadas esféricas

Se utiliza la Ec. (A.2), para obtener los vectores unitarios

$$\frac{\partial \mathbb{R}}{\partial r} = \text{sen} \theta \cos \varphi \vec{a}_x + \text{sen} \theta \text{sen} \varphi \vec{a}_y + \cos \theta \vec{a}_z \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \left[\text{sen}^2 \theta (\cos^2 \varphi + \text{sen}^2 \varphi) + \cos^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}} = 1 \quad (\text{A.14})$$

$$\vec{a}_r = \text{sen} \theta \cos \varphi \vec{a}_x + \text{sen} \theta \text{sen} \varphi \vec{a}_y + \cos \theta \vec{a}_z \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial \mathbb{R}}{\partial \theta} = r (\cos \theta \cos \varphi \vec{a}_x + \cos \theta \text{sen} \varphi \vec{a}_y - \text{sen} \theta \vec{a}_z) \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial R}{\partial \theta} = \left[r^2 \cos^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + r^2 \sin^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}} = r \quad (\text{A.17})$$

$$\vec{a}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \vec{a}_x + \cos \theta \sin \varphi \vec{a}_y - \sin \theta \vec{a}_z \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial R}{\partial \varphi} = -r \sin \theta \sin \varphi \vec{a}_x + r \sin \theta \cos \varphi \vec{a}_y \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{\partial R}{\partial \varphi} = \left[r^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \right]^{\frac{1}{2}} = r \sin \theta \quad (\text{A.20})$$

$$\vec{a}_\varphi = -\sin \varphi \vec{a}_x + \cos \varphi \vec{a}_y \quad (\text{A.21})$$

A.3. Coeficientes métricos.

$$h_{u_i} \triangleq \frac{\partial R}{\partial u_i}$$

Si se tiene un vector unitario:

$$\vec{a}_{u_i} \triangleq \frac{\frac{\partial R}{\partial u_i}}{\frac{\partial R}{\partial u_i}} = \frac{\frac{\partial R}{\partial u_i}}{h_{u_i}} \quad (\text{A.22})$$

A.3.1. Coordenadas cartesianas.

$$h_x = 1 \quad h_y = 1 \quad h_z = 1 \quad (\text{A.23})$$

A.3.2. Coordenadas cilíndricas

De las Ecs. (A.4), (A.7) y (A.10):

$$h_r = 1 \quad h_\varphi = r \quad h_z = 1 \quad (\text{A.24})$$

A.3.3. Coordenadas esféricas

De las Ecs. (A.14), (A.17) y (A.20):

$$h_r = 1 \quad h_\theta = r \quad h_\varphi = r \operatorname{sen} \theta \quad (\text{A.25})$$

Apéndice B

COORDENADAS CURVILÍNEAS ORTOGONALES II.

B.1. Coordenadas y coeficientes métricos.

	u_1	u_2	u_3	h_1	h_2	h_3
Cartesianas	x	y	z	1	1	1
Cilíndricas	r_c	φ	z	1	r_c	1
Esféricas	r_e	θ	φ	1	r_e	$r_e \sin \theta$

B.2. Conversión de coordenadas cilíndricas a cartesianas y viceversa.

$x = r \cos \varphi$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$y = r \sin \varphi$	$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$
$z = z$	$z = z$

B.3. Conversión de coordenadas esféricas a cartesianas y viceversa.

$x = r \sin \theta \cos \varphi$	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
$y = r \sin \theta \sin \varphi$	$\theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
$z = r \cos \theta$	$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$

B.4. Conversión de vectores cartesianos unitarios a cilíndricos unitarios.

$$\begin{vmatrix} \vec{a}_r \\ \vec{a}_\varphi \\ \vec{a}_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{a}_x \\ \vec{a}_y \\ \vec{a}_z \end{vmatrix}$$

B.5. Conversión de vectores cilíndricos unitarios a cartesianos unitarios.

$$\begin{vmatrix} \vec{a}_x \\ \vec{a}_y \\ \vec{a}_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{a}_r \\ \vec{a}_\varphi \\ \vec{a}_z \end{vmatrix}$$

B.6. Conversión de vectores cartesianos unitarios a esféricos unitarios.

$$\begin{vmatrix} \vec{a}_r \\ \vec{a}_\theta \\ \vec{a}_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\varphi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\operatorname{sen}\varphi & -\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{a}_x \\ \vec{a}_y \\ \vec{a}_z \end{vmatrix}$$

B.7. Conversión de vectores esféricos unitarios a cartesianos unitarios.

$$\begin{vmatrix} \vec{a}_x \\ \vec{a}_y \\ \vec{a}_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & \cos\theta\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{a}_r \\ \vec{a}_\theta \\ \vec{a}_\varphi \end{vmatrix}$$

B.8. Gradiente

GRADIENTE	
Coordenadas curvilíneas ortogonales	$\nabla V = \sum_1^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial V}{\partial u_i} \vec{a}_i$

B.8.1. Coordenadas Cartesianas

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{a}_z$$

B.8.2. Coordenadas Cilíndricas

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{a}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{a}_z$$

B.8.3. Coordenadas Esféricas

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{a}_\varphi$$

B.9. Divergente

DIVERGENTE	
Coordenadas curvilíneas ortogonales	$\nabla \cdot \mathbb{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_1^3 \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3 F_i}{h_i} \right)$

B.9.1. Coordenadas cartesianas

$$\nabla \cdot \mathbb{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

B.9.2. Coordenadas cilíndricas

$$\nabla \cdot \mathbb{F} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

B.9.3. Coordenadas esféricas

$$\nabla \cdot \nabla V = \nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}$$

B.10. Rotacional

ROTACIONAL				
Coordenadas curvilíneas ortogonales	$\nabla \times \mathbb{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}$	$h_1 \vec{a}_1$	$h_2 \vec{a}_2$	$h_3 \vec{a}_3$
		$\frac{\partial}{\partial u_1}$	$\frac{\partial}{\partial u_2}$	$\frac{\partial}{\partial u_3}$
		$h_1 F_1$	$h_2 F_2$	$h_3 F_3$

B.10.1. Coordenadas cartesianas

$$\nabla \times \mathbb{F} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

B.10.2. Coordenadas cilíndricas

$$\nabla \times \mathbb{F} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{a}_r & r\vec{a}_\varphi & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_r & rF_\varphi & F_z \end{vmatrix}$$

B.10.3. Coordenadas esféricas

$$\nabla \times \mathbb{F} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \vec{a}_r & r\vec{a}_\theta & r\sin \theta \vec{a}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ F_r & rF_\theta & r\sin \theta F_\varphi \end{vmatrix}$$

B.11. Laplaciano escalar

LAPLACIANO ESCALAR	
Coordenadas curvilíneas ortogonales	$\nabla^2 V = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_1^3 \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i} \frac{\partial V}{\partial u_i} \right)$

B.11.1. Coordenadas cartesianas

$$\nabla \cdot \nabla V = \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

B.11.2. Coordenadas cilíndricas

$$\nabla \cdot \nabla V = \nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

B.11.3. Coordenadas esféricas

$$\nabla \cdot \nabla V = \nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

Bibliografía

- [1] ÁLVAREZ, T. L., “*Electricidad y Magnetismo*”, Universidad Andrés Bello, 2014.
- [2] ARFKEN, B. G. y WEBER, H. J., “*Mathematical Methods for Physicists*”, sexta edición, Elsevier Academic Press, 2005.
- [3] BOAST, W. B., “*Vector Fields*”, Harper & Row, Incorporated, New York, 1964.
- [4] CATAÑO, V. H. y VÁSQUEZ C. J .C, “*Electromagnetismo I*”, Talleres de la Sección de la UTP, Pereira, Colombia, 1999.
- [5] CHI, D. R., “*Problemas Propuestos y Resueltos de Electromagnetismo*”, Chile, 2017.
- [6] CORDERO, S. P., “*Electromagnetismo*”, Universidad de Chile, Departamento de Física, 2007.
- [7] DIOS, O., A. G. FEDERICO y R. M. DAVID, “*Campos Electromagnéticos*”, Ediciones UPC, Barcelona, 1998.
- [8] DURNEY, C. H. y JOHNSON C. C, “*Introduction to Modern Electromagnetics*”, McGraw-Hill, Book Company, Inc., Tokyo, 1969.
- [9] EDMINISTER, J. A, “*Electromagnetics*”, Schaum’s Outline Series, McGraw-Hill, Book Company, Inc., New York, 1984.
- [10] FANO, R. M., L. J. CHU JARVIS y R. B. ADLER, “*Electromagnetic Fields, Energy, and Forces*”, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1962.
- [11] HAPPOLDT, H., “*Centrales y Redes Eléctricas*”, Editorial Labor S.A., Barcelona, 1974.

- [12] HARRINGTON, R. F, “*Electromagnetic Engineering*”, seventh printing , Dover Publications, Inc., 2003.
- [13] HAYT, W. H. JR., “*Electromagnetism*”,
- [14] JACKSON, J. D, “*Classical Electrodynamics*”, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1998.
- [15] KIMBARK, EDWARD W., “*Electrical Transmission of Power Signals*”, sixth printing, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1962.
- [16] KRAUS, J. D., “*Electromagnetismo*”, cuarta edición, McGraw-Hill, Book Company, Inc., New York, 2012.
- [17] LANDAU, L. y E. LIFSHITZ, “*The Classical Theory of Fields*”, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1951.
- [18] MARSHALL, S y DUBROFF, R., SKITEK, G, “*Electromagnetismo*”, cuarta edición, Prentice-Hall Hispanoamericana, 1997.
- [19] MATLAB., “*User’s Guide*”, MathWorks, Versión R2022a, Limusa, México, DF, 2022.
- [20] MATVEEV, A.N, “*Electricidad y Magnetismo*”, Ed. Mir, Moscú, 1988.
- [21] MAXWELL, J. C, “*A Treatise on Electricity and Magnetism*”, Dover Publications, Inc., 1954.
- [22] MCQUISTAN, R. B, “*Scalar and Vector Fields*”, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1965.
- [23] MORON, J, *Fundamentos de Teoría Electromagnética*, Chile, 2017.
- [24] PARIS, D y HURD, F, “*Basic Electromagnetic Theory*”, McGraw – Hill Book Company, 1969.
- [25] PLONSEY, R. y R. COLLIN., “*Principles and Applications of Electromagnetic Fields*”, second printing, McGraw-Hill Book Company, New York, 1970.
- [26] PLONUS, MARTIN A., “*Applied Electromagnetics*”, second printing, McGraw-Hill Book Company, New York, 1986.
- [27] REITZ, R y F. J. MILFORD., “*Foundations of Electromagnetics Theory*”, segunda edición, Addison- Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass, 1960.

- [28] ROGERS, W. E., *“Introduction to Electric Fields”*, second printing, McGraw-Hill, Book Company, Inc., New York, 2012.
- [29] ROMERO, R. R. y A. V. RUBÉN, *“Fundamentos de Electricidad y Magnetismo”*, Primera edición. Editorial Limusa-Wiley, S.A., México, 1969.
- [30] SADIKU, M., *“Elementos de Electromagnetismo”*, cuarta edición, Oxford University Press, 2007.
- [31] SEELY, S., *“Introduction to ElectroMagnetic Fields”*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1958.
- [32] SHACKELFORD, JAMES, F. y *“Introduction to Material Science for Engineers”*, cuarta edición, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996.
- [33] SMYTHE, W. R., *“Static and Dynamic Electricity”*, second ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1950.
- [34] SPIEGEL, M. R., *“Theory and Problems of Vector Analysis”*, Schaum’s Outline Series, McGraw-Hill Book Company, New York, 1974.
- [35] SPIEGEL, M. R., *“Vector Analysis”*, Schaum Outline Series, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1959
- [36] STANLEY, V., MARSHALL., *“Electromagnetismo. Conceptos y Aplicaciones”*, cuarta edición, Prentice Hall, 1997.
- [37] STEVENSON, WILLIAM D., JR., *“Elements of Power System Analysis”*, third ed., International Student Edition, 1975.
- [38] STRATTON, J. A., *“Electromagnetic Theory”*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1941.
- [39] TALLEDO, A., *“Teoría Electromagnética”*, Guzlop Editoras, Lima, Perú, 2013.
- [40] THOMAS, G. B y R. L. FINNEY, *“Calculus and Analytic Geometry”*, 6a. ed., Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1984.
- [41] ULABY, F. T., *“Fundamentals of Applied Electromagnetics”*, quinta edición, Prentice Hall, 2006.
- [42] VARELA, M., *“Física Aplicada i Óptica”*, Universidad de Barcelona, Barcelona, España, 2001.

- [43] VILLATE, J. E., “*Teoria Electromagnética*”, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto Portugal, Stanford, California 94305, Usa, 2015. .
- [44] ZAHN, M., “*Electromagnetic Field Theory*”, second printing, Limusa, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge 01239, 1980.
- [45] ZOZAYA, J. A., “*Apuntes de Teoría Electromagnética*”, Universidad de Carabobo, Venezuela, 2017.

La Editorial de la Universidad
Tecnológica de Pereira tiene como
política la divulgación del saber
científico, técnico y humanístico para
fomentar la cultura escrita a través
de libros y revistas científicas
especializadas.

Las colecciones de este proyecto son:
Trabajos de Investigación, Ensayos,
Textos Académicos y Tesis Laureadas.

Este libro pertenece a la Colección
Textos Académicos.

El plan de estudios de Ingeniería Eléctrica UTP incluía el abordaje del fenómeno electrostático en un primer curso y el fenómeno electrodinámico en un segundo curso: el nombre de estos cursos son Electromagnetismo I y Electromagnetismo II respectivamente. Desde entonces se ha impartido a los estudiantes de ingeniería eléctrica consolidando unas bases teóricas sólidas y muy rigurosas. Este texto académico es el resultado de varios años de experiencia de los autores orientando el curso de ELECTROMAGNETISMO I y contiene las notas de clase utilizadas para el desarrollo del mismo, así como muchos ejemplos resueltos y ejercicios propuestos, para orientar sobre la aproximación al fenómeno electrostático. Como se ha dicho, el libro de texto que se encontrarán es básicamente el desarrollo del microcurrículo del curso que se ha impartido a lo largo de la historia del programa incluyendo sus diferentes actualizaciones. El documento se ha desarrollado de tal manera que sea comprensible para estudiantes de pregrado y sirva de base para estudiar temáticas más avanzadas en esta área. Además, contiene un suficiente número de aplicaciones que ilustran los conceptos básicos. Los capítulos de este libro constituyen los principios básicos de la electrostática y algunos elementos importantes de la electrocinética.